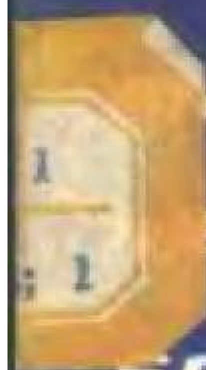
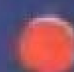
梅凤翔 编著

分析力学专题





ANALYTICAL MECANICAL SPECIAL PROBLEW



北京工业学院出版社

责任编辑：郑锡琏

封面设计：王允华

ISBN 7-81013-027-7/O·3　定价：2.65元

分析力学专题

梅凤翔 编著

北 京 工 业 学 院 出 版 社

前　言

《分析力学专题》包括相对运动动力学、扰动理论、动力学控制、Lagrange力学逆问题、刚体分析动力学和单面约束系统动力学等六个彼此独立的专题。

本书初稿成于1985年夏，并作为教材为北京工业学院应用力学系1985级和1986级研究生讲授这个课程。1986年9月在北京工业学院油印试版，共四个专题。这次修改又增加了刚体分析动力学和单面约束系统动力学两个专题。

北京工业学院应用力学系褚亦清教授和刘桂林副教授耐心仔细地审阅了书稿并提出宝贵意见，谨此致谢。

限于水平，难免有疏漏之处，敬请读者指正。

梅凤翔

1987年3月

内 容 简 介

本书包括相对运动动力学、扰动理论、动力学控制、Lagrange力学逆问题、刚体分析动力学和单面约束系统动力学等六个专题。

本书可作为高等院校力学专业研究生的教材，也可作为高等院校力学、数学、物理教师、力学工作者和有关科技人员的参考书。

分析力学专题

梅凤翔 编著

*

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

通县向阳印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 12.25印张 315千字

1988年6月第一版 1988年6月第一次印刷

ISBN7-81013-027-7/O·3

印数：1-5,000 册 定价：2.65元

目 录

第一章　相对运动动力学

用分析力学的理论与方法研究力学系统的相对运动动力学，不仅可在表现形式上达到统一，而且对复杂系统显示出优越性。

在这一章里，我们研究载体的运动微分方程、被载体的相对运动微分方程、相对平衡、刚体的相对运动以及若干应用。

本世纪初，Whittaker研究了受匀速转动约束的完整系统的Lagrange方程[1]。六十年代，苏联著名力学家Лурье.А.И在他的著作"分析力学"中研究了完整系统的一般相对运动动力学[2]。近年，人们在将[1–2]中的结果推广到非完整系统方面也做了不少工作[3–6]。

§1.1　载体运动微分方程

1．问题的提出　我们研究一质点系，它由一个刚体(载体)和N个质点(被载体)组成。被载体相对于与载体相固联的坐标系$ox'y'z'$的位置由n个独立的广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定。研究这样系统的运动可提出两类问题。第一，载体运动是已知的，需要确定被载体的运动，并且假定被载体的运动不改变载体事先给定的运动规律，当载体质量远远大于被载体质量时，被载体对载体运动的影响可以忽略。反之，则不然。例如，在研究陀螺运动时，它对地球运动的影响可略去，但地球运动却大大影响陀螺的运动。当然，载体的运动要靠外力来保证。第二，更一般的情形是载体运动规律未知，需由考虑到被载体来确定。此时系统的位置一般由$n+6$个参数确定。

对两种情形，系统运动的确定可采用同一方法，并且第一种情形可由第二种情形用简单地去掉称之为载体运动方程的某些方

$$T_m = \sum m_i(\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i) \cdot \overset{*}{\boldsymbol{r}}'_i$$
$$= \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{Q}_r + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K}_r^0 \qquad (1.1.6)$$

为混合动能，其中 $\boldsymbol{Q}_r$ 为相对动量的主矢，$\boldsymbol{K}_r^0$ 为相对动量对极点 o 的主矩。T_m 既依赖于确定载体运动的量 $\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{\omega}$，也依赖于被载体的相对运动。T_m 是广义速度 $\dot{q}_s$ 的线性函数。

最后

$$T_r = \sum \frac{1}{2} m_i \overset{*}{\boldsymbol{r}}{}_i'^2$$

为相对运动的动能，它是广义速度的二次函数。

3\. **载体运动微分方程** 用 v_{0i} 和 $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 表记矢量 $\boldsymbol{v}_0$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 在与载体固联的坐标系 $ox'y'z'$ 上的投影。根据为确定载体运动的参数选取，系统的动能 T 不依赖于广义坐标。于是可将运动微分方程分成两组，一组是对准速度 v_{0i}，ω_i 的方程，即与动轴理论相应的方程[1]，或称为 Euler-Lagrange 方程；一组是对广义坐标 q_s 的 Lagrange 方程。

由(1.1.2)和(1.1.3)知，系统任何点 M_i 的虚位移为

$$\delta \boldsymbol{r}_i = \delta \boldsymbol{r}_0 + \delta \boldsymbol{r}'_i = \delta \boldsymbol{r}_0 + \sum_{s=1}^{x} \frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \delta q_s + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}'_i \qquad (1.1.7)$$

这里 $\boldsymbol{\theta}$ 为载体的无限小转量矢量。加在载体和被载体上所有主动力在系统虚位移上的元功为

$$\delta' A = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i$$
$$= \boldsymbol{V} \cdot \delta \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{m}^0 + \sum_{s=1}^{x} Q_s \delta q_s \qquad (1.1.8)$$

其中 $\boldsymbol{V} = \sum \boldsymbol{F}_i$ 为所有主动力的主矢，$\boldsymbol{m}^0 = \sum \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i$ 为所有主动力对极点 o 的主矩。

现在组成对准速度 v_{0i}，ω_i 的 Euler-Lagrange 方程。因 T_r 不依赖于准速度，有

$$\frac{\partial T}{\partial v_{0i}}=\frac{\partial T_e}{\partial v_{0i}}+\frac{\partial T_m}{\partial v_{0i}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i}=\frac{\partial T_e}{\partial \omega_i}+\frac{\partial T_m}{\partial \omega_i} \tag{1.1.9}$$

由(1.1.5)，有

$$\frac{\partial T_e}{\partial v_{01}}=M\boldsymbol{v}_0\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial v_{01}}+M\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial v_{01}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial v_{02}}=M\boldsymbol{v}_0\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial v_{02}}+M\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial v_{02}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c)$$

$$\frac{\partial T_e}{\partial v_{03}}=M\boldsymbol{v}_0\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial v_{03}}+M\frac{\partial \boldsymbol{v}_0}{\partial v_{03}}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c)$$

因

$$\boldsymbol{v}_0=v_{01}\boldsymbol{i}'+v_{02}\boldsymbol{j}'+v_{03}\boldsymbol{k}'$$

$$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{i}'+\omega_2\boldsymbol{j}'+\omega_3\boldsymbol{k}'$$

$$\boldsymbol{r}'_c=x'_c\boldsymbol{i}'+y'_c\boldsymbol{j}'+z'_c\boldsymbol{k}'$$

其中$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$为动系$ox'y'z'$轴向单位矢量，故有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T_e}{\partial v_{01}}&=M(v_{01}+\omega_2 z'_c-\omega_3 y'_c)\\ \frac{\partial T_e}{\partial v_{02}}&=M(v_{02}+\omega_3 x'_c-\omega_1 z'_c)\\ \frac{\partial T_e}{\partial v_{03}}&=M(v_{03}+\omega_1 y'_c-\omega_2 x'_c)\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

其中x'_c，y'_c，z'_c为整个系统质心相对坐标系$ox'y'z'$的坐标。
类似地，有

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_e}{\partial \omega_1} &= M(y'_c v_{03} - z'_c v_{02}) + \theta^0_{11}\omega_1 + \theta^0_{12}\omega_2 + \theta^0_{13}\omega_3 \\
\frac{\partial T_e}{\partial \omega_2} &= M(z'_c v_{01} - x'_c v_{03}) + \theta^0_{21}\omega_1 + \theta^0_{22}\omega_2 + \theta^0_{23}\omega_3 \\
\frac{\partial T_e}{\partial \omega_3} &= M(x'_c v_{02} - y'_c v_{01}) + \theta^0_{31}\omega_1 + \theta^0_{32}\omega_2 + \theta^0_{33}\omega_3
\end{aligned}\right\}
\tag{1.1.11}
$$

其中θ^0_{ik}为惯量张量在o点的分量。如前面指出的，x'_c，y'_c，z'_c，θ^0_{ik}应作为广义坐标的已知函数来研究。

由(1.1.6)，有

$$
\frac{\partial T_m}{\partial v_{01}} = Q_{r1} = M\dot{x}'_c, \qquad \frac{\partial T_m}{\partial v_{02}} = Q_{r2} = M\dot{y}'_c,
$$

$$
\frac{\partial T_m}{\partial v_{03}} = Q_{r3} = M\dot{z}'_c \tag{1.1.12}
$$

以及

$$
\frac{\partial T_m}{\partial \omega_1} = K^0_{r1}, \quad \frac{\partial T_m}{\partial \omega_2} = K^0_{r2}, \quad \frac{\partial T_m}{\partial \omega_3} = K^0_{r3} \tag{1.1.13}
$$

Euler-Lagrange 方程有与自由刚体同样的形式，即[1][2]

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial v_{01}} + \omega_2\frac{\partial T}{\partial v_{03}} - \omega_3\frac{\partial T}{\partial v_{02}} = V_1 \tag{1.1.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \omega_2\frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \omega_3\frac{\partial T}{\partial \omega_2} + v_{02}\frac{\partial T}{\partial v_{03}} \\
&- v_{03}\frac{\partial T}{\partial v_{02}} = m^0_1
\end{aligned}
\tag{1.1.15}
$$

将(1.1.10)和(1.1.12)代入方程(1.1.14)，得到

$$
\begin{aligned}
M\{\dot{v}_{01} &+ (\dot{\omega}_2 z'_c - \dot{\omega}^3 y'_c) + (\omega_2\dot{z}'_c - \omega_3\dot{y}'_c) \\
&+ (\omega_2 v_{03} - \omega_3 v_{02}) + [\omega_2(\omega_1 y'_c - \omega_2 x'_c) \\
&- \omega_3(\omega_3 x'_c - \omega_1 z'_c)] + (\ddot{x}'_c + \omega_2\dot{z}'_c - \omega_3\dot{y}'_c)\} = V_1
\end{aligned}
\tag{1.1.16}
$$

其他两个方程由指标 1，2，3 轮换而得到。这三个方程写成矢量形式如下

$$
M\{\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c)+2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_c
+\overset{**}{\boldsymbol{r}}'_c\}=\boldsymbol{V} \tag{1.1.17}
$$

它表示系统质心运动定理。括号中的项乃是系统质心的绝对加速度$\boldsymbol{a}_a$。其中有牵连加速度

$$
\boldsymbol{a}_e=\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'_c+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_c) \tag{1.1.18}
$$

式中前两项为极点加速度，第三项为旋转加速度，第四项为向心加速度。因动系与载体固联，动系有与载体同样的角速度，故

$$
\dot{\boldsymbol{\omega}}=\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}=\overset{*}{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.1.19}
$$

(1.1.17)中第五项为 Coriolis 加速度

$$
\boldsymbol{a}_{cor}=2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_c \tag{1.1.20}
$$

而最后一项为相对加速度

$$
\boldsymbol{a}_r=\overset{**}{\boldsymbol{r}}'_c \tag{1.1.21}
$$

相对速度和相对加速度按下式计算

$$
\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_c=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s}\dot{q}_s,\quad \overset{**}{\boldsymbol{r}}'_c=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_s}\ddot{q}_s+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}'_c}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_k\dot{q}_s\right) \tag{1.1.22}
$$

现在研究载体运动的第二组方程。将(1.1.10)—(1.1.13)代入(1.1.15)，并简化得

$$
\begin{aligned}
&M(y'_c\dot{v}_{03}-z'_c\dot{v}_{02})+\theta^0_{11}\dot{\omega}_1+\theta^0_{12}\dot{\omega}_2+\theta^0_{13}\dot{\omega}_3+\omega_1\dot{\theta}^0_{11}\\
&\quad+\omega_2\dot{\theta}^0_{12}+\omega_3\dot{\theta}^0_{13}+K^0_{r1}+M\{\omega_2(v_{02}x'_c\\
&\quad-v_{01}y'_c)-\omega_3(z'_cv_{01}-x'_cv_{03})\}+\omega_2(\theta^0_{31}\omega_1\\
&\quad+\theta^0_{32}\omega_2+\theta^0_{33}\omega_3)-\omega_3(\theta^0_{21}\omega_1+\theta^0_{22}\omega_2\\
&\quad+\theta^0_{23}\omega_3)+\omega_2K^0_{r3}-\omega_3K^0_{r2}+M\{v_{02}(\omega_1y'_c
\end{aligned}
$$

$$-\omega_2 x'_c) - v_{03}(\omega_3 x'_c - \omega_1 z'_c)\} = m_1^0 \qquad (1.1.23)$$

其他两个方程用指标1，2，3轮换得到。这三个方程可写成矢量形式

$$\theta^0 \cdot \dot{\omega} + \overset{*}{\theta}{}^0 \cdot \omega + \omega \times \theta^0 \cdot \omega + \overset{*}{K}{}_r^0 + \omega \times K_r^0$$
$$+ M r'_c \times (\overset{*}{v}_0 + \omega_x v_0) = m^0 \qquad (1.1.24)$$

我们继续变换(1.1.24)。惯量张量定义为

$$\theta^0 = \sum m_i (r_i'^2 \mathrm{E} - r'_i r'_i) \qquad (1.1.25)$$

故有

$$\overset{*}{\theta}{}^0 = 2 \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \sum_i m_i \left(\mathrm{E} r'_i \cdot \frac{\partial r'_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2} r'_i \frac{\partial r'_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \frac{\partial r'_i}{\partial q_s} r'_i\right) \qquad (1.1.26)$$

于是

$$\overset{*}{\theta}{}^0 \cdot \omega + \omega \times K_r^0 = 2 \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \sum_i m_i \Big\{ r'_i \cdot \frac{\partial r'_i}{\partial q_s} \omega$$
$$- \frac{1}{2} \frac{\partial r'_i}{\partial q_s} r'_i \cdot \omega - \frac{1}{2} r'_i \frac{\partial r'_i}{\partial q_s} \cdot \omega$$
$$+ \frac{1}{2} \omega \times \left(r'_i \times \frac{\partial r'_i}{\partial q_s}\right) \Big\}$$
$$= 2 \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \sum_i m_i r'_i \times \left(\omega \times \frac{\partial r'_i}{\partial q_s}\right)$$
$$= 2 \sum_i m_i r'_i \times (\omega \times \overset{*}{r}{}'_i) \qquad (1.1.27)$$

如将方程(1.1.24)左边这两项移至方程的右边，它可当作 Coriolis 惯性力的矩

$$m_{cor}^0 = -\overset{*}{\theta}{}^0 \cdot \omega - \omega \times K_r^0 \qquad (1.1.28)$$

这个力矩是加在载体上的，它由与其相联的被载体的相对运动引起。

用(1.1.17)由(1.1.24)中可消去极点加速度，结果有关系

$$\theta^c\cdot\dot{\omega}+\omega\times\theta^c\cdot\omega=m^c+m^c_{cor}-\overset{*}{K}{}^c_r \qquad (1.1.29)$$

这里 θ^c 为在质心的惯量张量

$$\theta^c=\theta^0-M(Er'_c\cdot r'_c-r'_cr'_c) \qquad (1.1.30)$$

用 K^c_r 表示相对动量对质心的主矩，有

$$K^c_r=K^0_r-Mr'_c\times\overset{*}{r}{}'_c \qquad (1.1.31)$$

并用 m^c_{cor} 表示 Coriolis 惯性力对质心的矩，有

$$m^c_{cor}=-\overset{*}{\theta}{}^c\cdot\omega-\omega\times K^c_r \qquad (1.1.32)$$

最后，用 m^c 表示主动力对质心的主矩，即

$$m^c=m^0-r'_c\times V \qquad (1.1.33)$$

当然，如果极点 O 与质心 C 重合，那么方程(1.1.29)可直接由(1.1.24)得到。

这样，我们解决了第一类问题——组成载体的运动方程组(1.1.17)和(1.1.24)或(1.1.17)和(1.1.29)。

上述方程组不封闭(它包含广义坐标 q_s 为参数)，为了求解还必须联合被载体的相对运动方程。当然，在没有相对运动的情形，方程(1.1.17)和(1.1.24)与刚体运动方程相合。

还需注意，如果载体有一点相对惯性坐标系作匀速直线运动，取该点为极点，则方程(1.1.24)中左边最后一项为零，这时载体运动可当作绕定点 o 的转动。运动方程有形式

$$\theta^0\cdot\dot{\omega}+\omega\times\theta^0\cdot\omega+\overset{*}{K}{}^0_r=m^0+m^0_{cor} \qquad (1.1.34)$$

4. 说明例子 为说明载体运动方程的应用，我们举一简单例子。

质量为 M、半径为 r 的匀质圆盘，其质心 o 以速度 v_0 沿与圆盘平面相垂直的固定轴 oy 运动，圆盘又以角速度 ω 绕轴 oy 运动。在圆盘上有一过质心的光滑圆管，管内有一质量为 m 的小球。试建立载体的运动微分方程(图1-1)。

将以上各式代入(1.1.35)，得到

$$(M+m)\Big\{\overset{*}{v}_0\boldsymbol{j}'-\frac{mq\dot{\omega}}{M+m}\boldsymbol{k}'-\frac{mq\omega^2}{M+m}\boldsymbol{i}'$$

$$-2\frac{m\dot{q}\omega}{M+m}\boldsymbol{k}'+\frac{m\ddot{q}}{M+m}\boldsymbol{i}'\Big\}=\boldsymbol{V}$$

这矢量方程可写成三个标量方程

$$\left.\begin{array}{l} m(\ddot{q}-q\omega^2)=V_1 \\ (M+m)\overset{*}{v}_0=V_2 \\ -m(q\dot{\omega}+2\dot{q}\omega)=V_3 \end{array}\right\} \tag{1.1.36}$$

其中V_1，V_2，V_3为外力主矢$\boldsymbol{V}$在$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$，$\boldsymbol{k}'$方向的投影。

系统转动方程为(1.1.24)，即

$$\theta^0\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+\overset{*}{\theta}{}^0\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times\theta^0\cdot\boldsymbol{\omega}+\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}^0_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}^0_r$$

$$+(M+m)\boldsymbol{r}'_c\times(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)=\boldsymbol{m}^0 \tag{1.1.37}$$

现计算(1.1.37)中各项。我们有

$$\theta^0=\frac{1}{4}Mr^2\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'+\frac{1}{2}Mr^2\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'+\frac{1}{4}Mr^2\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'$$

$$+mq^2\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'+mq^2\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'$$

$$\theta^0\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}=\left(\frac{1}{2}Mr^2+mq^2\right)\dot{\omega}\boldsymbol{j}'$$

$$\overset{*}{\theta}{}^0=2mq\dot{q}\boldsymbol{j}'\boldsymbol{j}'+2mq\dot{q}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'$$

$$\overset{*}{\theta}{}^0\cdot\boldsymbol{\omega}=2mq\dot{q}\omega\boldsymbol{j}'$$

$$\boldsymbol{\omega}\times\theta^0\cdot\boldsymbol{\omega}=\Big(-\frac{1}{4}Mr^2\boldsymbol{k}'\boldsymbol{i}'+\frac{1}{4}Mr^2\boldsymbol{i}'\boldsymbol{k}'$$

$$+mq^2\boldsymbol{i}'\boldsymbol{k}'\Big)\cdot\omega^2\boldsymbol{j}'=0$$

$$K_r^0=0$$

$$(M+m)r_c'\times(\overset{*}{v}_0+\omega\times v_0)$$

$$=(M+m)\cdot\frac{mq}{M+m}i'\times(\overset{*}{v}j'+0)=mq\overset{*}{v}_0k'$$

将上述各式代入(1.1.37)，得到

$$(\frac{1}{2}Mr^2+mq^2)\dot{\omega}j'+2mq\dot{q}j'+mq\overset{*}{v}_0k'=m^0$$

将其投影于i'，j'，k'上，得

$$\left.\begin{aligned}&0=m_1^0\\&(\frac{1}{2}Mr^2+mq^2)\dot{\omega}+2mq\dot{q}=m_2^0\\&mq\overset{*}{v}_0=m_3^0\end{aligned}\right\}\qquad(1.1.38)$$

§1.2 被载体相对运动微分方程

1. 被载体相对运动方程 我们由绝对运动的Lagrange方程出发来推导相对运动的Lagrange方程，并阐明各项的力学意义。

设被载体在载体上的位置由n个广义坐标$q_s(s=1, 2, \cdots, n)$确定，绝对运动的Lagrange方程为

$$\varepsilon_s(T_e)+\varepsilon_s(T_m)+\varepsilon_s(T_r)=Q_s\quad(s=1, 2, \cdots, n)\tag{1.2.1}$$

其中

$$\varepsilon_s=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}$$

为Euler算子。

首先计算第一项。牵连运动动能T_e不依赖于广义速度$\dot{q}_s$，因此

$$e_s(T_e) = -\frac{\partial T_e}{\partial q_s} = -M(v_0 \times \omega) \cdot \frac{\partial r'_c}{\partial q_s}$$

$$-\frac{1}{2}\omega \cdot \frac{\partial \theta^0}{\partial q_s} \cdot \omega \qquad (1.2.2)$$

其次计算第二项，因 v_0 不依赖于 q_s 和 $\dot{q}_s$，有

$$\varepsilon_s(v_0 \cdot Q_r) = \dot{v}_0 \cdot \frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_s} + v_0 \cdot \varepsilon_s(Q_r)$$

$$= M\dot{v}_0 \cdot \frac{\partial \overset{*}{r}'_c}{\partial \dot{q}_s} + Mv_0 \cdot \varepsilon_s(\overset{*}{r}'_c)$$

因

$$\frac{\partial \overset{*}{r}'_c}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial r'_c}{\partial q_s}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial r'_c}{\partial q_s} = \frac{\partial \dot{r}'_c}{\partial q_s} = \frac{\partial \overset{*}{r}'_c}{\partial q_s}$$

$$+\omega \times \frac{\partial r'_c}{\partial q_s} \qquad (1.2.3)$$

故

$$e_s(\overset{*}{r}'_c) = \frac{d}{dt}\frac{\partial \overset{*}{r}'_c}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \overset{*}{r}'_c}{\partial q_s} = \omega \times \frac{\partial r'_c}{\partial q_s}$$

于是

$$\varepsilon_s(v_0 \cdot Q_r) = M(\overset{*}{v}_0 + \omega \times v_0) \cdot \frac{\partial r'_c}{\partial q_s}$$

$$+M(v_0 \times \omega) \cdot \frac{\partial r'_c}{\partial q_s} = M\overset{*}{v}_0 \cdot \frac{\partial r'_c}{\partial q_s} \qquad (1.2.4)$$

矢量 ω 不依赖于 q_s 和 $\dot{q}_s$，于是有

$$e_s(\omega \cdot K_r^0) = \dot{\omega} \cdot \frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s} + \omega \cdot \varepsilon_s(K_r^0)$$

$$= \dot{\omega} \cdot \frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s} + \omega \cdot \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial K_r^0}{\partial q_s}\right)$$

$$=\dot{\omega}\cdot\frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s}+\omega\cdot\left[\left(\frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s}\right)^*+\omega\times\frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial K_r^0}{\partial q_s}\right]$$

但

$$\omega\cdot\left(\omega\times\frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s}\right)=0$$

这样

$$\varepsilon_s(\omega\cdot K_r^0)=\dot{\omega}\cdot\frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s}+\omega\cdot\varepsilon_s^*(K_r^0) \qquad (1.2.5)$$

这里*号表示 Euler 算子中对时间的导数运算是在与载体固联的坐标系中进行的。

微分方程(1.2.1)可写成形式

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s-M(\overset{*}{v}_0+\omega\times v_0)\cdot\frac{\partial r_c'}{\partial q_s}$$
$$+\frac{1}{2}\omega\cdot\frac{\partial\theta^0}{\partial q_s}\cdot\omega-\dot{\omega}\cdot\frac{\partial K_r^0}{\partial \dot{q}_s}-\omega\cdot\varepsilon_s^*(K_r^0) \qquad (1.2.6)$$

现在研究方程(1.2.6)右边各项及其力学意义。矢量

$$S^0=-M\dot{v}_0=-M(\overset{*}{v}_0+\omega\times v_0) \qquad (1.2.7)$$

作用在系统质心上，可称为平动运动惯性力。量

$$Q_s^0=S^0\cdot\frac{\partial r_c'}{\partial q_s}=-M(\overset{*}{v}_0+\omega\times v_0)\cdot\frac{\partial r_c'}{\partial q_s}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial q_s}M(\overset{*}{v}_0+\omega\times v_0)\cdot r_c' \qquad (1.2.8)$$

为平动运动的广义惯性力，而标积

$$\Pi^0=M(\overset{*}{v}_0+\omega\times v_0)\cdot r_c' \qquad (1.2.9)$$

可作为这些力的均匀力场的势能。

角速度矢量投影的二次形

$$\Pi^{\omega}=-\frac{1}{2}\omega\cdot\theta^{0}\cdot\omega \tag{1.2.10}$$

可称为离心力势能，而量

$$Q_{s}^{\omega}=-\frac{\partial \Pi^{\omega}}{\partial q_{s}}=\frac{1}{2}\omega\cdot\frac{\partial\theta^{0}}{\partial q_{s}}\cdot\omega \tag{1.2.11}$$

是广义离心力。

现在研究方程(1.2.6)的最后两项，它们没有势力特性。因

$$K_{r}^{0}=\sum_{i}m_{i}r_{i}'\times\overset{*}{r}_{i}'=\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_{s}\sum_{i}m_{i}r_{i}'\times\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{s}} \tag{1.2.12}$$

因此

$$\dot{\omega}\cdot\frac{\partial K_{r}^{0}}{\partial\dot{q}_{s}}=\dot{\omega}\cdot\sum_{i}m_{i}r_{i}'\times\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{s}}$$

$$=\sum_{i}m_{i}(\dot{\omega}\times r_{i}')\cdot\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{s}}$$

矢量

$$S_{i}^{z}=-m_{i}(\dot{\omega}\times r_{i}') \tag{1.2.13}$$

是质点旋转惯性力，因此

$$Q_{s}^{\dot{\omega}}=-\dot{\omega}\cdot\frac{\partial K_{r}^{0}}{\partial\dot{q}_{s}}=-\sum_{i}(\dot{\omega}\times m_{i}r_{i}')\cdot\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{s}} \tag{1.2.14}$$

是广义旋转惯性力。

由(1.2.12)，有

$$\left(\frac{\partial K_{r}^{0}}{\partial\dot{q}_{s}}\right)^{*}=\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_{k}\sum_{i}m_{i}\left(\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{k}}\times\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{s}}+r_{i}'\times\frac{\partial^{2}r_{i}'}{\partial q_{k}\partial q_{s}}\right)$$

$$\frac{\partial K_{r}^{0}}{\partial q_{s}}=\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_{k}\sum_{i}m_{i}\left(\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{s}}\times\frac{\partial r_{i}'}{\partial q_{k}}+r_{i}'\times\frac{\partial^{2}r_{i}'}{\partial q_{k}\partial q_{s}}\right)$$

因此

$$-\boldsymbol{\omega}\cdot\varepsilon_s^*(\boldsymbol{K}_r^0)=-2\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_{k=1}^{n}\dot{q}_k\sum_i m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_k}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}$$

(1.2.15)

而这个表达式有两种解释。其一，为广义Coriolis惯性力

$$-\boldsymbol{\omega}\cdot\varepsilon_s^*(\boldsymbol{K}_r^0)=Q_s^{cor}=-2\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_i m_i\tilde{\boldsymbol{r}}_i'\times\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial \dot{q}_s}$$

$$=-\sum_i m_i(2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}_i')\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s} \qquad (1.2.16)$$

其二，可写成广义陀螺力形式

$$-\boldsymbol{\omega}\cdot\varepsilon_s^*(\boldsymbol{K}_r^0)=\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{sk}\dot{q}_k \qquad (1.2.17)$$

带有陀螺系数

$$\gamma_{sk}=2\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_i m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_k}=-\gamma_{ks} \qquad (1.2.18)$$

将(1.2.9)、(1.2.10)、(1.2.14)和(1.2.17)代入方程(1.2.6)，我们得到

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(\Pi^0+\Pi^\omega)+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s \qquad (1.2.19)$$

$$(s=1,2,\cdots,n)$$

方程(1.2.19)的左边仅依赖于确定被载体相对载体的位置和运动的量。相对运动方程可由绝对运动方程右边加上一些表征载体运动的力——惯性力而得到。

如果载体运动未知，那么方程(1.2.19)应与方程(1.1.17)和(1.1.24)一起来研究。我们得到$n+6$个微分方程，其中有对广义坐标$q_1,q_2,\cdots,q_n$的n个二阶方程和对准速度v_{ok}，ω_k的六个一阶方程。还要联合六个与载体广义坐标相应的广义速度用准速度表示的方程。

当载体运动给定时，只要研究方程(1.2.19)。

2． **几种特殊情形** 如果载体作平动，则有

$$\Pi^{\omega}=Q_s^{\omega}=\Gamma_s=0 \tag{1.2.20}$$

于是方程(1.2.19)成为

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s-\frac{\partial \Pi^0}{\partial q_s} \tag{1.2.21}$$

如果载体作定点运动，可取固定点为极点，于是有

$$\Pi^0=0 \tag{1.2.22}$$

而方程(1.2.19)给出

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s-\frac{\partial \Pi^{\omega}}{\partial q_s}+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s \tag{1.2.23}$$

如果载体作定轴匀速转动，我们有

$$\Pi^0=Q_s^{\dot{\omega}}=0 \tag{1.2.24}$$

于是方程(1.2.19)给出

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s-\frac{\partial \Pi^{\omega}}{\partial q_s}+\Gamma_s \tag{1.2.25}$$

如果取定轴为$oz(oz')$，则

$$\Pi^{\omega}=-\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2)$$

$$\Gamma_s=2\omega\sum_i m_i\left(\dot{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}-\dot{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)$$

于是(1.2.25)给出

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s+\omega^2\sum_i m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$+2\omega\sum_i m_i\left(\dot{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}-\dot{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right) \tag{1.2.26}$$

3． **能量方程** 我们将广义力 Q_s 分成两部分：

$$Q_s=Q_s'+Q_s''$$

其中 Q_s' 为有势力

$$Q_s'=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}$$

Q_s'' 为非势力。于是方程(1.2.19)可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s+Q_s'' \tag{1.2.27}$$

其中

$$L_r=T_r-\Pi-\Pi^0-\Pi^{\omega} \tag{1.2.28}$$

我们按方程(1.2.27)来计算$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)$。

我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)=\sum_{s=1}^{n}Q_s^{\dot{\omega}}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}Q_s''\dot{q}_s \tag{1.2.29}$$

由 Γ_s 的性质，有

$$\sum_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s=0 \tag{1.2.30}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)=\sum_{s=1}^{n}Q_s^{\dot{\omega}}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}Q_s''\dot{q}_s \tag{1.2.31}$$

方程(1.2.31)可称为能量方程。

如果 L_r 不显含时间 t，非势力为陀螺力或不存在，且$\dot{\omega}=0$，则有广义能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s - L_r = h = \text{const} \tag{1.2.32}$$

§1.3 相对平衡

1. 问题的提出 设

$$q_s = q_s^0 = \text{const} \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.3.1}$$

是被载体的相对平衡位置。当研究被载体相对平衡时，自然提出下述问题：载体怎样运动才存在相对平衡；如何确定可能的相对平衡位置；什么样的相对平衡位置是稳定的，什么样是不稳定的。我们限于研究载体的这种运动：载体上任何点的加速度，对于与载体固联的轴系来说，其大小和方向都不改变。由刚体上点的加速度分布得知

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i') + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_i' = c$$

因此，极点的加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 和载体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 对载体说来大小和方向保持常数。我们还假设，方程(1.2.19)中的广义力 Q_s 不依赖于时间。

2. 相对平衡方程 在被载体相对平衡时，广义相对速度 $\dot{q}_s$ 和广义相对加速度 $\ddot{q}_s$ 等于零，因此，相对运动动能 T_r 和陀螺力 Γ_s 也等于零。此外，根据对载体运动所作假设，广义旋转惯性力 $Q_s^{\dot{\omega}}$ 也等于零。

由方程(1.2.19)得到广义坐标 q_s^0 满足方程

$$Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}(\Pi^0 + \Pi^\omega) = 0 \tag{1.3.2}$$

在方程(1.3.2)中

$$\Pi^0 = M\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{r}_c',\quad \Pi^\omega = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\theta^0\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{1.3.3}$$

矢量 $\boldsymbol{r}_c'$ 和张量 θ^0 依赖于未知坐标 q_s^0。

如果 n 个方程(1.3.2)有解(1.3.1)(一个或几个)，那么就确定了相对平衡位置。相对平衡位置的稳定性可按运动稳定性的通

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \qquad (1.3.8)$$

以及

$$\varepsilon_{m+t}(T_r)=\sum_{l=1}^{n-m}\sum_{r=1}^{n-m}[m+l,\ m+r;\ m+t]\dot{q}_{m+l}\dot{q}_{m+r}=0$$

$$(t=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m) \qquad (1.3.9)$$

陀螺力为

$$\Gamma_s=\sum_{k=1}^{n}\gamma_{sk}\dot{q}_k$$

在相对平衡下，有

$$\Gamma_s=\sum_{l=1}^{n-m}\gamma_{s,m+l}\dot{q}_{m+l} \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \qquad (1.3.10)$$

$$\Gamma_{m+l}=\sum_{k=1}^{n-m}\gamma_{m+l,m+k}\dot{q}_{m+k} \quad (l=1,2,\cdots,n-m) \quad (1.3.11)$$

将(1.3.8)、(1.3.9)、(1.3.10)和(1.3.11)代入(1.3.4)和(1.3.5)并注意到$Q_s^{\omega}=0$，便得到相对平衡方程

$$\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n-m}\sum_{r=1}^{n-m}\frac{\partial a_{m+l,m+r}}{\partial q_s}\dot{q}_{m+l}\dot{q}_{m+r}+Q_s$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_s}(\Pi^0+\Pi^{\omega})+\sum_{l=1}^{n-m}\gamma_{s,m+l}\dot{q}_{m+l}=0$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \qquad (1.3.12)$$

$$\sum_{k=1}^{n-m}\gamma_{m+l,m+k}\dot{q}_{m+k}=0 \quad (l=1,2,\cdots,n-m) \qquad (1.3.13)$$

由此可确定$q_s^0(s=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$及$\dot{q}_{m+k}^0(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-m)$。

$$(s=1,2,\cdots,n) \tag{1.4.7}$$

对载体作定轴匀速转动情形，有

$$\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-2\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s+\omega^2\sum_i m_i\left(x_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}+y_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$+2\omega\sum_i m_i\left(\dot{y}_i'\frac{\partial x_i'}{\partial q_s}-\dot{x}_i'\frac{\partial y_i'}{\partial q_s}\right)\qquad(s=1,2,\cdots,n) \tag{1.4.8}$$

2. 被载体相对运动微分方程的Appell形式 力学系统绝对运动的加速度能量为

$$S_a=\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{a}_{ia}\cdot\boldsymbol{a}_{ia} \tag{1.4.9}$$

其中

$$\boldsymbol{a}_{ia}=\boldsymbol{a}_{ir}+\boldsymbol{a}_{ie}+\boldsymbol{a}_{ic} \tag{1.4.10}$$

为系统中点的绝对加速度，牵连加速度为

$$\boldsymbol{a}_{ie}=\dot{\boldsymbol{v}}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_i'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i') \tag{1.4.11}$$

Coriolis加速度为

$$\boldsymbol{a}_{ic}=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{ir} \tag{1.4.12}$$

因$\boldsymbol{a}_{ie}$和$\boldsymbol{a}_{ic}$中不含$\ddot{q}_s$，故

$$\frac{\partial S_a}{\partial \ddot{q}_s}=\sum_i m_i\boldsymbol{a}_{ia}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_{ia}}{\partial \ddot{q}_s}$$

$$=\sum_i m_i\boldsymbol{a}_{ia}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{a}_{ir}}{\partial \ddot{q}_s}$$

$$=\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s}+\sum_i m_i\{\dot{\boldsymbol{v}}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_i'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i')$$

$$+2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}_i'\}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s} \tag{1.4.13}$$

其中

$$S_r=\frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{a}_{ir}\cdot\boldsymbol{a}_{ir} \tag{1.4.14}$$

为相对运动的加速度能量。

绝对运动的Appell方程为

$$\frac{\partial S_a}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s \quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.4.15}$$

将(1.4.13)代入(1.4.15)，得到

$$\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s-\sum_i m_i \dot{v}_0 \cdot \frac{\partial r'_i}{\partial q_s}-\sum_i m_i(\dot{\omega}\times r'_i)\cdot \frac{\partial r'_i}{\partial q_s}$$

$$-\sum_i m_i[\omega\times(\omega\times r'_i)]\cdot \frac{\partial r'_i}{\partial q_s}-\sum_i m_i\cdot 2(\omega\times \overset{*}{r}'_i)\cdot \frac{\partial r'_i}{\partial q_s}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.4.16}$$

注意到(1.2.9)、(1.2.10)、(1.2.14)及(1.2.16)，则方程(1.4.16)可写成

$$\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(\Pi^0+\Pi^\omega)+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.4.17}$$

这就是相对运动微分方程的 Appell形式。

§1.5 被载体相对运动微分方程的简单应用

为说明被载体相对运动微分方程的应用，我们举两个比较简单的例子。

例1 在浪木AB上一点O挂一物理摆。试用绝对运动的Lagrange方程和相对运动的Lagrange方程建立物理摆的相对运动微分方程，并研究是否存在广义能量积分？

［解］ 设浪木AB的运动由角θ确定，并已知$\theta=\theta(t)$。物理摆相对浪木的运动用角φ描述，其质心C距悬挂点为l，质量为m，对质心的回转半径为k(图1-2)。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varphi}}-\frac{\partial T_r}{\partial \varphi}=Q_\varphi-\frac{\partial \Pi^0}{\partial \varphi} \tag{1.5.7}$$

物理摆相对运动为定轴转动，有

$$T_r=\frac{1}{2}m(k^2+l^2)\dot{\varphi}^2 \tag{1.5.8}$$

又

$$\frac{\partial \Pi^0}{\partial \varphi}=\dot{\boldsymbol{v}}_0\cdot m\frac{\partial \boldsymbol{r}'_c}{\partial \varphi} \tag{1.5.9}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_0=-l_0(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta)\boldsymbol{i}'+l_0(\ddot{\theta}\cos\theta-\dot{\theta}^2\sin\theta)\boldsymbol{j}'$$

$$\boldsymbol{r}'_c=l\cos\varphi\boldsymbol{i}'+l\sin\varphi\boldsymbol{j}'$$

其中$\boldsymbol{i}'$，$\boldsymbol{j}'$为ox'，oy'方向单位矢量。因此，有

$$\dot{\boldsymbol{v}}_0\cdot m\frac{\partial \boldsymbol{r}'_c}{\partial \varphi}=mll_0\{\ddot{\theta}\cos(\varphi-\theta)+\dot{\theta}^2\sin(\varphi-\theta)\} \tag{1.5.10}$$

将(1.5.9)、(1.5.10)及(1.5.3)代入方程(1.5.7)，仍得到方程(1.5.6)。

从以上计算看出，直接应用相对运动的 Lagrange 方程来建立相对运动动力学方程要比应用绝对运动的Lagrange 方程方便些。

最后，我们来研究问题的广义能量积分是否存在的问题。由T_r的表达式(1.5.8)知，它是$\dot{\varphi}$的齐二次式。势能

$$\Pi=mg\{l(1-\cos\varphi)+a+l_0(1-\cos\theta)\} \tag{1.5.11}$$

其中 a 为浪木高度。因 $\theta=\theta(t)$，故Π明显含 t，而

$$L_r=T_r-\Pi-\Pi^0$$

也明显含 t。因此，系统没有广义能量积分。

例2 质量为 m、长为 l 的匀质杆 AB，其一端A可沿铅垂固定轴oz滑动，另一端B可沿水平轴ox'滑动，而 ox'轴以匀角速度

ω绕 oz 轴转动。B 端与弹簧 BC 相连，C 端固定在 ox' 轴上。当 $\theta=0$ 时，弹簧为原长。弹簧的刚性系数为 k，不计摩擦，且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$。求杆的相对平衡位置并分析其稳定性，再求杆 AB 在稳定平衡位置附近小振动的周期。

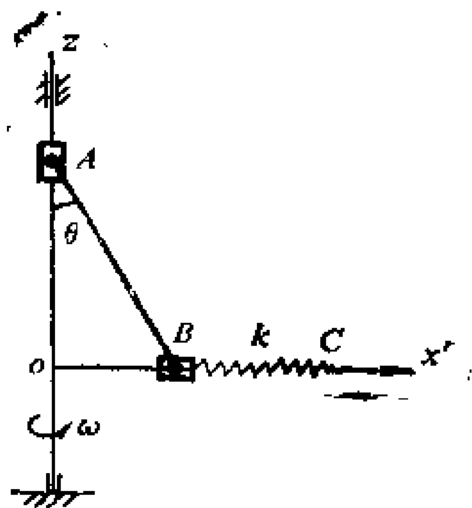


图1-3

[解] 问题属于载体定轴匀速转动的情形，可用方程(1.2.26)来建立相对运动动力学方程。同时，也可以先写出广义能量积分，然后求解。今采用后一方法。

相对运动动能为

$$T_r=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{1.5.12}$$

重力势能和弹簧势能之和为

$$\Pi=mg\frac{l}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta \tag{1.5.13}$$

离心力势能为

$$\begin{aligned}\Pi^{\omega}&=-\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2)\\&=-\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i\rho_i^2\sin^2\theta\\&=-\frac{1}{6}ml^2\omega^2\sin^2\theta\end{aligned} \tag{1.5.14}$$

因

$$L_r=T_r-\Pi-\Pi^{\omega}$$

不显含时间 t，故有广义能量积分

$$\frac{\partial L_r}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta}-L_r=h$$

即

$$\frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}mgl\cos\theta+\frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta-\frac{1}{6}ml^2\omega^2\sin\theta^2=h$$

或

$$\dot{\theta}^2+\frac{3g}{l}\cos\theta+\frac{3k}{m}\sin^2\theta-\omega^2\sin^2\theta=\frac{6h}{ml^2} \tag{1.5.15}$$

将(1.5.15)两端对时间 t 求导数，便得系统相对运动动力学方程

$$\ddot{\theta}+\left[\left(\frac{3k}{m}-\omega^2\right)\cos\theta-\frac{3g}{2l}\right]\sin\theta=0 \tag{1.5.16}$$

首先，求相对平衡位置。我们有

$$\sin\theta=0,\ 即\theta=0 \tag{1.5.17}$$

$$\cos\theta=\frac{3mg}{2l(3k-m\omega^2)},$$

即
$$\theta=\arccos\frac{3mg}{2l(3k-m\omega^2)} \tag{1.5.18}$$

相对平衡位置(1.5.18)在

$$\frac{3mg}{2l(3k-m\omega^2)}<1$$

时才有解，即要求

$$k>\frac{mg}{2l}+\frac{m\omega^2}{3} \tag{1.5.19}$$

因此，如果$k>\frac{mg}{2l}+\frac{m\omega^2}{3}$，则有两个相对平衡位置(1.5.17)和(1.5.18)；如果$k<\frac{mg}{2l}+\frac{m\omega^2}{3}$，则只有一个相对平衡位置(1.5.17)。

其次，研究相对平衡的稳定性。

相对平衡位置的稳定性，由

$$\frac{\partial^2(\Pi+\Pi^\omega)}{\partial\theta^2}>0$$

来判断。我们有

$$\frac{\partial^2(\Pi+\Pi^\omega)}{\partial\theta^2}=\left(kl-\frac{1}{3}ml^2\omega^2\right)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$-\frac{1}{2}mgl\cos\theta \qquad (1.5.20)$$

以$\theta=0$代入(1.5.20)，得

$$\left.\frac{\partial^2(\Pi+\Pi^\omega)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0}=l^2\left(k^2-\frac{1}{3}m\omega^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}mgl\begin{cases}>0,\ 若k>\dfrac{mg}{2l}+\dfrac{m\omega^2}{3}\\ <0,\ 若k<\dfrac{mg}{2l}+\dfrac{m\omega^2}{3}\end{cases}$$

因此，当$k>\frac{mg}{2l}+\frac{m\omega^2}{3}$时，$\theta=0$是稳定平衡位置；当$k<\frac{mg}{2l}+\frac{m\omega^2}{3}$时，$\theta=0$是不稳定平衡位置。

将(1.5.18)代入(1.5.20)，得

$$\left.\frac{\partial^2(\Pi+\Pi^\omega)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta}=\frac{\{3mg+2l(3k-m\omega^2)\}\{3mg-2l(3k-m\omega^2)\}}{12(3k-m\omega^2)}$$

$$(1.5.21)$$

其中θ由(1.5.18)式确定。由(1.5.19)知，(1.5.21)小于零，故相对平衡位置(1.5.18)是不稳定的。

最后，求在稳定平衡位置附近作小振动的周期。在$\theta=0$附近，有$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$，于是方程(1.5.16)成为

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{3k}{m}-\frac{3g}{2l}-\omega^2\right)\theta=0 \qquad (1.5.22)$$

小振动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3k}{m}-\frac{3g}{2l}-\omega^2}} \tag{1.5.23}$$

§1.6　旋转软轴的平衡

研究圆截面的弹性杆，杆的端点$\bar{o}$安在以常角速度ω绕轴$\bar{o}z$转动的卡盘上。在杆端M装一刚体S(图1-4)。系统的位形(当忽略杆的质量时)由杆截面M在载体一卡盘固联的坐标系中的坐标和转角来确定。假设，这个位形保持着，即有相对平衡。

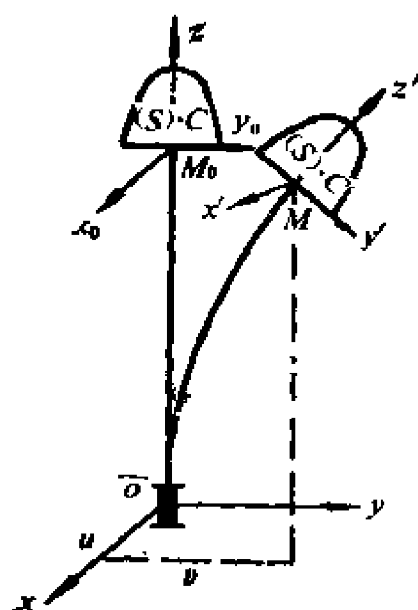


图1-4

在刚体S上固联一坐标系$Mx'y'z'$，其中轴Mz'指向杆在点M的弹性轴的切线方向。点M在转动坐标系$\bar{o}xyz$中的坐标x，y记作u，v，当忽略杆的压缩时，即假设$z=l$。在没有转动时，杆轴在$\bar{o}z$方向，而$Mx'y'z'$取$M_0x_0y_0z_0$位置，$Mx_0y_0z_0$有与轴系$\bar{o}xyz$相平行的方向。用θ表示转动矢量，当轴系$M_0x_0y_0z_0$转动θ时变成与轴系$Mx'y'z'$相平行。注意到u，v以及转动矢量的投影α，β，γ都是小量。用i_s表示轴系$\bar{o}xyz$的单位矢量，用i'_s表示轴系$Mx'y'z'$的单位矢量。

为研究旋转软轴的平衡，必须将弹性力势能Π_e和离心力势能Π^ω用上面所指五个广义坐标u，v，α，β，γ来表示。

1.　离心力势能Π^ω的表达式　由公式(1.2.10)，有

$$\Pi^\omega=-\frac{1}{2}\omega\cdot\theta^{\bar{o}}\cdot\omega$$

为计算 Π^* 需计算张量 $\theta^{\bar{o}}$。我们用 θ^M 来表示 θ^o。设刚体 S 上质量 m_i 对 $\bar{o}$ 的矢径为 $\boldsymbol{r}_i$，对 M 的矢径为 $\boldsymbol{r}'_i$，M 对 $\bar{o}$ 的矢径 $\boldsymbol{r}_M$，则有

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_M+\boldsymbol{r}'_i \tag{1.6.1}$$

而

$$\theta^{\bar{o}}=\sum m_i(\mathbf{E}\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_i) \tag{1.6.2}$$

其中 $\mathbf{E}$ 为单位张量.

将(1.6.1)代入(1.6.2)，得到

$$\begin{aligned}\theta^o=&\sum_i m_i(\mathbf{E}\boldsymbol{r}'_i\cdot\boldsymbol{r}'_i-\boldsymbol{r}'_i\boldsymbol{r}'_i)+\sum_i m_i(\mathbf{E}\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{r}_M-\boldsymbol{r}_M\boldsymbol{r}_M)\\&+\sum m_i(2\mathbf{E}\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{r}'_i-\boldsymbol{r}'_i\boldsymbol{r}_M-\boldsymbol{r}_M\boldsymbol{r}'_i)\\=&\theta^M+M(\mathbf{E}\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{r}_M-\boldsymbol{r}_M\boldsymbol{r}_M)\\&+2M\left[\mathbf{E}\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{r}_c-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_M\boldsymbol{r}'_c+\boldsymbol{r}'_c\boldsymbol{r}_M)\right]\end{aligned} \tag{1.6.3}$$

其中 $\boldsymbol{r}'_c$ 为质心 C 对 M 的矢径。在(1.6.3)中，有

$$\boldsymbol{r}_M=u\boldsymbol{i}_1+v\boldsymbol{i}_2+l\boldsymbol{i}_3,\quad \boldsymbol{r}'_c=x'_c\boldsymbol{i}'_1+y'_c\boldsymbol{i}'_2+z'_c\boldsymbol{i}'_3 \tag{1.6.4}$$

进一步计算需要求出单位矢量 $\boldsymbol{i}_s$ 与 $\boldsymbol{i}'_s$ 间夹角的余弦。量 Π^* 的计算应精确到广义坐标的二次项，因此余弦表达式中需保留 α，β，γ 的二阶小量。

下面导出矢量有限转动的 Rodriques 公式：一个矢量 $\boldsymbol{\rho}$ 绕单位矢量 $\boldsymbol{e}$ 转一角 χ 而成为 $\boldsymbol{\rho}'$，试将 $\boldsymbol{\rho}'$ 用 $\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{e}$，χ 表出。令 $\overrightarrow{O_1M}=\boldsymbol{\rho}_0$，$\overrightarrow{O_1M'}=\boldsymbol{\rho}'_0$(图1-5)，有 $\boldsymbol{\rho}_0=\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\rho}$，$\boldsymbol{\rho}'_0=\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\rho}$。为将 $\boldsymbol{\rho}'$ 用 $\boldsymbol{\rho}$ 表示，需建立 $\boldsymbol{\rho}'_0$ 与 $\boldsymbol{\rho}_0$ 的关系。因

$$\overrightarrow{O_1M'}=\overrightarrow{O_1S}+\overrightarrow{SM'}$$

即

$$\boldsymbol{\rho}'_0=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_0+\boldsymbol{\rho}'_0)+\overrightarrow{MS'}$$

而

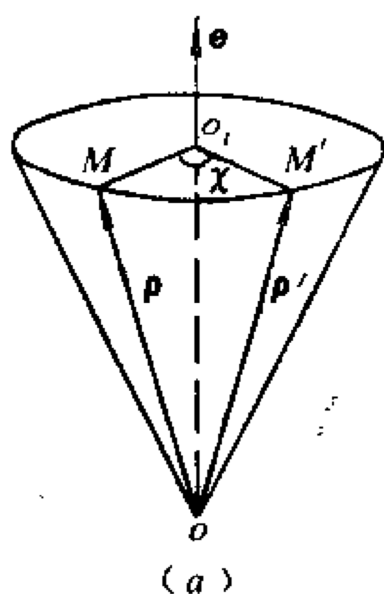
$$\overrightarrow{SM'}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{\rho}_0+\boldsymbol{\rho}'_0)\text{tg}\frac{\chi}{2}$$

故

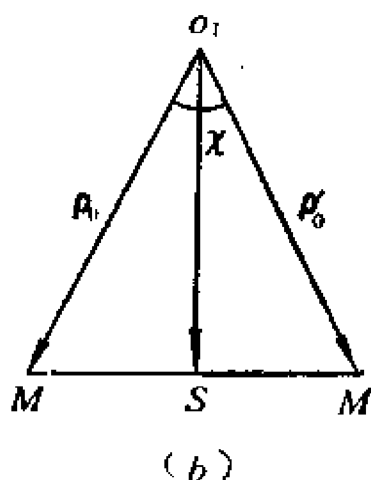
$$\boldsymbol{\rho}'_0-\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}'_0\text{tg}\frac{\chi}{2}=\boldsymbol{\rho}_0+\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}_0\text{tg}\frac{\chi}{2}$$

所以

$$\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}'\text{tg}\frac{\chi}{2}=\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}\text{tg}\frac{\chi}{2} \qquad (a)$$



(a)



(b)

图1-5

还要解出 $\boldsymbol{\rho}'$ 为 $\boldsymbol{\rho}$ 的函数．为此，将(a)两端左乘 $\boldsymbol{e}$，并注意到

$$\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}')=\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\rho}'-\boldsymbol{\rho}'=\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'$$

得

$$\boldsymbol{\rho}'\text{tg}\frac{\chi}{2}+\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}'=-\boldsymbol{\rho}\text{tg}\frac{\chi}{2}+\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}+2\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\rho}\text{tg}\frac{\chi}{2} \qquad (b)$$

由(a)、(b)消去 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}'$，得

$$\boldsymbol{\rho}'=\frac{1}{1+\text{tg}^2\frac{\chi}{2}}\left\{\boldsymbol{\rho}\left(1-\text{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)+2\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\rho}\text{tg}\frac{\chi}{2}\right.$$

$$+2\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\rho}\,\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}\}$$

$$=\boldsymbol{\rho}+\frac{2\boldsymbol{e}\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}}\times\left(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{e}\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}\times\boldsymbol{\rho}\right)$$

引进有限转动矢量 $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{\theta}=2\boldsymbol{e}\,\mathrm{tg}\frac{\chi}{2}$$

则有

$$\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}+\frac{1}{1+(\theta^2/4)}\boldsymbol{\theta}\times\left(\boldsymbol{\rho}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\rho}\right) \qquad (c)$$

公式(c)称为 Rodriques 公式。

应用公式(c)，有

$$\boldsymbol{i}'_s=\boldsymbol{i}_s+\frac{1}{1+(\theta^2/4)}\left(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{i}_s+\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{i}_s-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_s\theta^2\right) \quad (1.6.5)$$

注意到

$$\boldsymbol{\theta}=\alpha\boldsymbol{i}_1+\beta\boldsymbol{i}_2+\gamma\boldsymbol{i}_3 \qquad (1.6.6)$$

由(1.6.5)算得

$$\boldsymbol{i}'_1\cdot\boldsymbol{i}_1=1+\frac{1}{1+(\theta^2/4)}\left(-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\gamma^2\right)\approx 1-\frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2)$$

$$\boldsymbol{i}'_1\cdot\boldsymbol{i}'_2=\frac{1}{1+(\theta^2/4)}\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\approx\gamma+\frac{1}{2}\alpha\beta$$

$$\boldsymbol{i}'_1\cdot\boldsymbol{i}_3=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}\theta^2/4\right)}\left(-\beta+\frac{1}{2}\alpha\gamma\right)\approx-\beta+\frac{1}{2}\alpha\gamma$$

类似地可算出其他余弦。将结果列表如下

	$\boldsymbol{i}_1$	$\boldsymbol{i}_2$	$\boldsymbol{i}_3$
$\boldsymbol{i}'_1$	$1-\frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2)$	$\gamma+\frac{1}{2}\alpha\beta$	$-\beta+\frac{1}{2}\alpha\gamma$

$$i_2' \quad -\gamma+\frac{1}{2}\alpha\beta \qquad 1-\frac{1}{2}(\gamma^2+\alpha^2) \quad \alpha+\frac{1}{2}\beta\gamma$$

$$i_3' \quad \beta+\frac{1}{2}\alpha\gamma \qquad -\alpha+\frac{1}{2}\beta\gamma \qquad 1-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$$

因 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{i}_3$，由(1.2.10)有

$$\Pi^{\omega}=-\frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{i}_3\cdot\theta^0\cdot\boldsymbol{i}_3 \tag{1.6.7}$$

又

$$\boldsymbol{i}_3\cdot(\mathrm{E}\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{r}_M-\boldsymbol{r}_M\boldsymbol{r}_M)\cdot\boldsymbol{i}_3=u^2+v^2 \tag{1.6.8}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}_3\cdot[\mathrm{E}\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{r}_c'-\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_M\boldsymbol{r}_c'+\boldsymbol{r}_c'\boldsymbol{r}_M)]\cdot\boldsymbol{i}_3\\
&=\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{r}_c'-\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{r}_c'\boldsymbol{r}_M\cdot\boldsymbol{i}_3\\
&=(u\boldsymbol{i}_1+v\boldsymbol{i}_2)\cdot\boldsymbol{r}_3'+l\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{r}_c'-\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{r}_c'l\\
&=(u\boldsymbol{i}_1+v\boldsymbol{i}_2)\cdot\boldsymbol{r}_c'\\
&\approx ux_c'+vy_c'+(x_c'v-y'u)\gamma+z_c'(u\beta+v\alpha)
\end{aligned} \tag{1.6.9}$$

用 θ_{ik} 表示张量 θ^M 在轴系 $Mx'y'z'$ 中的分量，有

$$\boldsymbol{i}_3\cdot\theta^M\cdot\boldsymbol{i}_3=\theta_{11}\alpha_{13}^2+\theta_{22}\alpha_{23}^2+\theta_{33}\alpha_{33}^2+2\theta_{12}\alpha_{13}\alpha_{23}$$
$$+2\theta_{23}\alpha_{33}\alpha_{23}+2\theta_{13}\alpha_{13}\alpha_{33}$$

利用余弦表，我们有

$$\boldsymbol{i}_3\cdot\theta^M\cdot\boldsymbol{i}_3=(\theta_{11}-\theta_{33})\beta^2+(\theta_{22}-\theta_{33})\alpha^2+\theta_{33}$$
$$-2\theta_{12}\alpha\beta+2\theta_{23}\left(\alpha+\frac{1}{2}\gamma\beta\right)+2\theta_{13}\left(-\beta+\frac{1}{2}\alpha\gamma\right) \tag{1.6.10}$$

将(1.6.8)、(1.6.9)、(1.6.10)、(1.6.3)代入(1.6.7)，我们得到离心力势能

$$\Pi^{\omega}=-\frac{1}{2}\omega^2\Big\{(\theta_{11}-\theta_{33})\beta^2+(\theta_{22}-\theta_{33})\alpha^2$$
$$-2\theta_{12}\alpha\beta+(\theta_{23}\beta+\theta_{13}\alpha)\gamma+M(u^2+v^2)$$

$$+2Mz_c'(u\beta-v\alpha)+2MV(x_c'v-y_c'u)\Big\}-\omega^2\Big\{\theta_{23}\alpha$$

$$-\theta_{13}\beta+M(x_c'u+y_c'v)\Big\}-\frac{1}{2}\theta_{33}\omega^2 \quad (1.6.11)$$

在(1.6.11)中最后一项不含广义坐标，可以舍去。

2. 弹性力势能 Π_e 的表达式 现在计算杆弯曲和扭转的弹性力势能 Π_e 设想在杆端 M 加上力 V_x^0, V_y^0 以及弯矩 L_y^0, L_x^0，如图 1-6 所示。在截面 z 的弯矩为

$$\left.\begin{aligned} L_y &= L_y^0+V_x^0(l-z) \\ L_x &= L_x^0-V_y^0(l-z) \end{aligned}\right\} \quad (1.6.12)$$

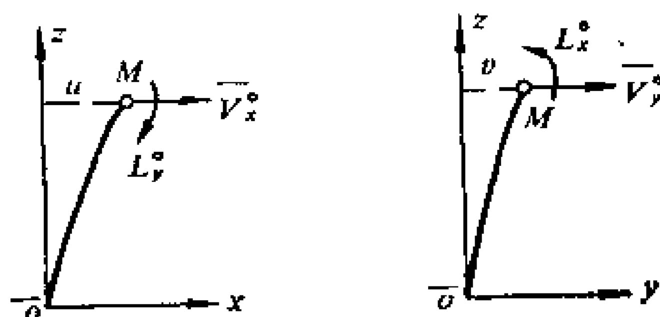


图1-6

相应于平面 zx，平面 yz 上弯曲的势能分别为

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{e1} &= \frac{1}{2EI}\int_0^l L_y^2\,dz = \frac{1}{2EI}\Big(\frac{1}{3}l^3V_x^{0\,2} \\ &\quad + 2\cdot\frac{1}{2}l^2V_x^0L_y^0+lL_y^{0\,2}\Big) \\ \Pi_{e2} &= \frac{1}{2EI}\int_0^l L_x^2\,dz = \frac{1}{2EI}\Big(\frac{1}{3}l^3V_y^{0\,2} \\ &\quad -2\cdot\frac{1}{2}l^2V_y^0L_x^0+lL_x^{0\,2}\Big) \end{aligned}\right\} \quad (1.6.13)$$

点 M 处位移 u, v，转角 α, β 与力及弯矩的关系为

$$\left.\begin{aligned}
u&=\frac{V_x^0 l^3}{3EI}+\frac{L_y^0 l^2}{2EI}\\
v&=\frac{V_y^0 l^3}{3EI}-\frac{L_x^0 l^2}{2EI}\\
\alpha&=-\frac{V_y^0 l^2}{2EI}+\frac{L_x^0 l}{EI}\\
\beta&=\frac{V_x^0 l^2}{2EI}+\frac{L_y^0 l}{EI}
\end{aligned}\right\}\tag{1.6.14}$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned}
V_x^0&=-\frac{6EI}{l^3}(2u-\beta l)\\
V_y^0&=-\frac{6EI}{l^3}(2v+\alpha l)\\
L_x^0&=\frac{2EI}{l^2}(3v+2\alpha l)\\
L_y^0&=-\frac{2EI}{l^2}(-3u+2\beta l)
\end{aligned}\right\}\tag{1.6.15}$$

将(1.6.15)代入(1.6.13)，得

$$\Pi_{e_1}+\Pi_{e_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{12EI}{l^3}\left\{u^2+v^2-2\cdot\frac{l}{2}(u\beta-v\alpha)+\frac{l^2}{3}(\alpha^2+\beta^2)\right\}\tag{1.6.16}$$

又扭转势能为

$$\Pi_{e_3}=\frac{1}{2}\frac{C}{l}\gamma^2\tag{1.6.17}$$

于是弹性力势能为

$$\Pi_e=\Pi_{e_1}+\Pi_{e_2}+\Pi_{e_3}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{12EI}{l^3}\left\{u^2+v^2-2\cdot\frac{l}{2}(u\beta-v\alpha)+\frac{l^2}{3}(\alpha^2\right.$$

$$\theta_{11}=\theta_{22},\ \theta_{12}=\theta_{23}=\theta_{31}=0,\ x_c'=y_c'=0$$

而从(1.6.20)最后一个方程得知 $\gamma=0$，即没有扭转。引进记号

$$\frac{3EI}{Ml^3\omega^2}=\nu^2,\quad \frac{z_c'}{l}=\zeta_c,\quad \frac{\theta_{11}-\theta_{33}}{Ml^2}=k$$

$$\frac{1}{l}\left(u+iv\right)=\rho,\quad \alpha+i\beta=\varepsilon \tag{1.6.21}$$

我们注意，当 $\nu=1$ 时，有 $\omega^2=3EI/(Ml^3)$，这相当于质量为 M 的质点在长 l 的梁端自由振动的频率。参数 k 可正、可负。例如，物体为较高圆柱，则 k 可为正值；物体为圆盘，则 k 为负值。对于均质连续圆柱，设高为 h，半径为 r，则 $\theta_{11}=(Mr^2/4)+(Mh^2/12)$，$\theta_{33}=Mr^2/2$，当 $h<r\sqrt{3}$ 时，$k<0$；而当 $h>r\sqrt{3}$ 时，$k>0$。

在(1.6.21)的记号下，由(1.6.20)得到齐次方程组

$$(4\nu^2-1)\rho+i\varepsilon(2\nu^2+\zeta_c)=0$$

$$-i(2\nu^2+\zeta_c)\rho+\left(\frac{4}{3}\nu^2-k\right)\varepsilon=0 \tag{1.6.22}$$

其行列式

$$\Delta(\nu^2)=(4\nu^2-1)\left(\frac{4}{3}\nu^2-k\right)-(2\nu^2+\zeta_c)^2$$

$$=\frac{4}{3}(\nu^4-a\nu^2+b) \tag{1.6.23}$$

这里有记号

$$a=3\left(\zeta_c+\frac{1}{3}+k\right),\quad b=\frac{4}{3}(k-\zeta_c^2) \tag{1.6.24}$$

如果行列式(1.6.23)异于零，那么在平衡位置 $\varepsilon=\rho=0$ 上杆轴是直线。与使 $\Delta(\nu^2)$ 变为零的参数值 ν^2 相应的角速度称为临界角速度。在临界角速度下，方程(1.6.22)有非零解。此时存在一些接近于直线的平衡位置。表示二次形 $\Pi_e+\Pi^\omega$ 正定的条件归

结为不等式$\Delta(\nu^2)>0$。因此，当满足不等式$\Delta(\nu^2)>0$时，直线形式是稳定的；当不满足这个不等式时，则失去稳定性。

(1.6.23)的判别式写成形式

$$a^2-4b=9\left\{\left(\zeta_c+\frac{1}{3}+k\right)^2-\frac{1}{3}(k-\zeta_c^2)\right\}$$

$$=3\left\{4\left(\zeta_c+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(\zeta_c+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{3}\right)+3\left(k-\frac{1}{3}\right)^2\right\} \tag{1.6.25}$$

它是量$\zeta_c+(1/2)$和$k-(1/3)$的二次形，因$4\cdot3-3^2>0$，故此二次形是正定的，仅在$\zeta_c=-1/2$，$k=1/3$时才变为零。$\Delta(\nu^2)$的根总是实的。如果

$$b>0 \quad 或 \quad \zeta_c^2>k \tag{1.6.26}$$

则一个根ν_1^2是正的。如果

$$b>0,\ a>0 \quad 或 k>\zeta_c^2,\quad \zeta_c+\frac{1}{3}+k>0 \tag{1.6.27}$$

那么两根ν_1^2和ν_2^2都是正的。实际上，只要$k>\zeta_c^2$，那么一定有$\zeta_c+\frac{1}{3}+k>0$。因此，条件(1.6.27)可归为$k>\zeta_c^2$。两根为负的情形相应于不等式

$$b>0,\ a<0 \tag{1.6.28}$$

但这是不相容的，因为只要$b>0$，一定有$a>0$。

这样，在条件(1.6.26)下，有

$$\Delta(\nu^2)=\frac{4}{3}(\nu^2-\nu_1^2)(\nu^2+\nu_2^2) \tag{1.6.29}$$

在条件(1.6.27)下，有

$$\Delta(\nu^2)=\frac{4}{3}(\nu^2-\nu_1^2)(\nu^2-\nu_2^2) \tag{1.6.30}$$

具有一个临界角速度ω_1^2的情形，对圆盘总是成立的，因为当$k<0$时有$b<0$。这相应于所谓陀螺效应对圆盘临界角速度的

影响现象。如果取 $k=0$，$\zeta_e=0$，即研究弹性轴上的纯质量，那么 $a=1$，$b=0$；此时，如(1.6.21)和(1.6.23)指明的，临界角速度 ω_0 等于该质量自由振动频率。对于薄圆盘可认为 $\zeta_e=0$，这时

$$\nu_1^2=\frac{1}{2}\left(1+3k+\sqrt{(1+3k)^2-3k}\right)$$

不难看出，因 $k<0$，成立不等式

$$\frac{1}{2}<\nu_1^2<1$$

（只要考虑到，当$k\to-\infty$时，$\sqrt{9k^2+\cdots}\approx-3k+\cdots$）。因此

$$2>\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}=\frac{1}{\nu_1^2}>1 \qquad (1.6.31)$$

陀螺效应提高了薄圆盘的临界角速度 ω_0。“陀螺效应”这一术语不反映现象的本质，因为这里所指的是离心力而不是陀螺力。

相应于根 ν_1^2 和 ν_2^2 的两个临界角速度 ω_1^2 和 ω_2^2，在满足不等式(1.6.27)时成立，即对圆柱成立。如果用 ν_2^2 表示(1.6.23)的较小根，如(1.6.30)指出的，平衡的直线形式在 $\omega^2<\omega_1^2$ 以及 $\omega^2>\omega_2^2$ 下是稳定的；当 $\omega_1^2<\omega^2<\omega_2^2$ 时，失去稳定性。

§1.7 刚体的相对运动

1. 载体的运动微分方程 作为§1.1和§1.2一般方程的特殊情形，我们研究被载体为绝对刚体的情形。仅限于一个被载刚体，自然可以推广到任意数目的被载刚体。我们研究两个刚体的相对运动，其中一个是载体，另一个是被载体。

与载体联一坐标系 $oxyz$，o 为极点(载体标号为1)。与被载体相联的坐标系 $C_2x'y'z'$ 的原点选在它的质心 C_2 上(被载体标号为2)。因此

$$M\boldsymbol{r}'_c=M_1\boldsymbol{r}'_{c1}+M_2\boldsymbol{r}'_{c2} \qquad (1.7.1)$$

其中 $\boldsymbol{r}'_c$ 为在方程(1.1.17)中指出的系统质心的矢径，$\boldsymbol{r}'_{c1}$ 和$\boldsymbol{r}'_{c2}$

为载体和被载体质心的矢径(原点在极点 O)。

作为被载体的广义坐标，取三个确定其质心在坐标系 $oxyz$ 中位置的量 q_1，q_2，q_3 以及三个给出轴系 $C_2x'y'z'$ 在 $oxyz$ 中方位的量 q_4，q_5，q_6。这样

$$\boldsymbol{r}'_{c_2}=\boldsymbol{r}'_{c_2}(q_1,\ q_2,\ q_3) \tag{1.7.2}$$

$$\boldsymbol{i}'_k=\boldsymbol{i}_k(q_4,\ q_5,\ q_6)\quad (k=1,\ 2,\ 3) \tag{1.7.3}$$

其中 $\boldsymbol{i}'_k$ 为被载体轴系单位矢量。

因在坐标系 $oxyz$ 中矢径 $\boldsymbol{r}'_{c_1}$ 是常矢量，于是有

$$M\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_c=M_2\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2},\quad M\overset{**}{\boldsymbol{r}}{}'_c=M_2\overset{**}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2} \tag{1.7.4}$$

并且按(1.1.22)，有

$$\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}=\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{r}'_{c_2}}{\partial q_s}\dot{q}_s,\quad \overset{**}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}=\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}'_{c_2}}{\partial q_s}\ddot{q}_s\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2\boldsymbol{r}'_{c_2}}{\partial q_k\partial q_s}\dot{q}_s\dot{q}_k\right) \tag{1.7.5}$$

刚体系统质心的运动方程(1.1.17)有形式

$$M_1\{\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'_{c_1}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_{c_1})\}$$

$$+M_2\{\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'_{c_2}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_{c_2})$$

$$+2\boldsymbol{\omega}\times\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}+\overset{**}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}\}=\boldsymbol{V} \tag{1.7.6}$$

其中除矢量 $\boldsymbol{v}_0$，$\boldsymbol{\omega}$ 外还有广义坐标 q_1，q_2，q_3 以及与之相应的广义速度和广义加速度。

现在组成第二个矢量方程——转动方程(1.1.24)。首先注意到等式

$$\theta^0=\theta_1^0+\theta_2^0 \tag{1.7.7}$$

而 θ_1^0 在坐标系 $oxyz$ 中是常张量，因此

$$\overset{*}{\theta}{}_1^0=0,\quad \overset{*}{\theta}{}^0=\overset{*}{\theta}{}_2^0 \tag{1.7.8}$$

进而自然要研究被载体对其质心的惯量张量 $\Theta_2^{c_2}$，为简单起见记作 Θ_2。我们有

$$\Theta_2^0=\Theta_2+M_2(\mathrm{E}\boldsymbol{r}'_{c_2}\cdot\boldsymbol{r}'_{c_2}-\boldsymbol{r}'_{c_2}\boldsymbol{r}'_{c_2}) \qquad (1.7.9)$$

容易证明求导数公式：

$$\overset{*}{\Theta}_2=\boldsymbol{\omega}'\times\Theta_2-\Theta_2\times\boldsymbol{\omega}' \qquad (a)$$

实际上，将 Θ_2 写成并矢形式，有

$$\Theta_2=\theta_{11}\boldsymbol{i}'\boldsymbol{i}'+\theta_{12}\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'+\cdots+\theta_{33}\boldsymbol{k}'\boldsymbol{k}'$$

于是

$$\overset{*}{\Theta}_2=\theta_{11}\overset{*}{\boldsymbol{i}}{}'\boldsymbol{i}'+\theta_{11}\boldsymbol{i}'\overset{*}{\boldsymbol{i}}{}'+\theta_{12}\overset{*}{\boldsymbol{i}}{}'\boldsymbol{j}'+\theta_{12}\boldsymbol{i}'\overset{*}{\boldsymbol{j}}{}'+\cdots+\theta_{33}\overset{*}{\boldsymbol{k}}{}'\boldsymbol{k}'+\theta_{33}\boldsymbol{k}'\overset{*}{\boldsymbol{k}}{}' \qquad (b)$$

而

$$\overset{*}{\boldsymbol{i}}{}'=\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{i}'=-\boldsymbol{i}'\times\boldsymbol{\omega}' \qquad (c)$$

将(c)代入(b)，便得(a)。对(1.7.9)两端求导数，并利用(a)，得到

$$\overset{*}{\Theta}{}^0=\boldsymbol{\omega}\times\Theta_2-\Theta_2\times\boldsymbol{\omega}'+M_2(2\mathrm{E}\boldsymbol{r}'_{c_2}\cdot\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}-\boldsymbol{r}'_{c_2}\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}-\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}\boldsymbol{r}'_{c_2}) \qquad (1.7.10)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}'$ 为被载体在与载体相联的坐标系 $oxyz$ 中的角速度矢量。

相对动量对极点 o 的主矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_r^0&=\sum_i\boldsymbol{r}'_i\times m_i\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_i=\sum_i(\boldsymbol{r}'_{ic_2}+\boldsymbol{r}'_{c_2})\times m_i(\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{ic_2}+\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2})\\&=\boldsymbol{r}'_{c_2}\times M_2\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}+\sum_i\boldsymbol{r}'_{ic_2}\times m_i(\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{r}'_{ic_2})\\&=\boldsymbol{r}'_{c_2}\times M_2\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}+\Theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}' \end{aligned}\qquad (1.7.11)$$

因此它在坐标系 $oxyz$ 中对时间的导数为

$$\overset{*}{\boldsymbol{K}}{}_r^0=\boldsymbol{r}'_{c_2}\times M_2\overset{**}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}+\Theta_2\cdot\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}{}'+\boldsymbol{\omega}'\times\Theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}' \qquad (1.7.12)$$

体绝对角速度为$\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}'$而得到。

这里和以后要利用到如下等式

$$\boldsymbol{a}\times\theta\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\theta\cdot\boldsymbol{a}=(\theta-\vartheta\mathrm{E})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) \tag{1.7.17}$$

它对二阶对称张量是对的；用 ϑ 表示张量的第一不变量，即对角线元素之和

$$\vartheta=\theta_{11}+\theta_{22}+\theta_{33} \tag{1.7.18}$$

而 E 为单位张量，利用(1.7.17)，得到

$$(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}')\times\theta_2\cdot(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}')=\boldsymbol{\omega}\times\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}'\times\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}'$$
$$+2\boldsymbol{\omega}'\times\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}+(\theta_2-\vartheta_2\mathrm{E})\cdot(\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\omega}) \tag{1.7.19}$$

这个公式便于计算方程(1.7.15)中出现的项。问题在于计算带矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 和张量 θ_2 的项自然在被载体轴系中给出，矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 也是在这些轴上投影。因此分出形如 $\boldsymbol{\omega}'\times\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}'$的项，计算它比较简单，因为 $\boldsymbol{\omega}'$ 也在被载体坐标系中给出。

2. 被载体质心相对运动方程 现在转向建立被载体的运动方程。可分成两组，第一组（对坐标 q_1，q_2，q_3）是被载体质心相对运动的三个方程，第二组（对坐标 q_4，q_5，q_6）是相对转动方程。

在势能表达式(1.2.9)和(1.2.10)中，可以去掉不含广义坐标的项，因为在组成方程(1.2.19)时要对这些坐标求导数。因此，考虑到(1.7.1)、(1.7.7)和(1.7.9)，我们有

$$\begin{aligned}\Pi^0&=M_2(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{r}'_{c_2}\\ \Pi^\omega&=-\frac{1}{2}M_2|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'_{c_2}|^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}\end{aligned} \tag{1.7.20}$$

由(1.7.11)和(1.7.4)，对 $s=1, 2, 3$，求得

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}_r^0}{\partial q_s}=\boldsymbol{r}'_{c_2}\times M_2\frac{\partial \boldsymbol{r}'_{c_2}}{\partial q_s}, \quad \varepsilon_s^*(\boldsymbol{K}_r^0)=2M\overset{*}{\boldsymbol{r}}{}'_{c_2}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_{c_2}}{\partial q_s} \tag{1.7.21}$$

按(1.2.6)，被载体第一组运动方程是

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s-M_2\{\overset{*}{v}_0+\omega\times v_0+\omega\times(\omega\times r'_{c_2})+\dot{\omega}\times r'_{c_2}+2\omega\times\overset{*}{r}'_{c_2}\}\cdot\frac{\partial r'_{c_2}}{\partial q_s} \tag{1.7.22}$$

注意在所研究情形中

$$T_r=\frac{1}{2}M_2\overset{*}{r}'_{c_2}\cdot\overset{*}{r}'_{c_2}+\frac{1}{2}\omega'\cdot\theta_2\cdot\omega' \tag{1.7.23}$$

因此

$$\begin{aligned}\varepsilon_s(T_r)&=M_2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overset{*}{r}'_{c_2}\cdot\frac{\partial\overset{*}{r}'_{c_2}}{\partial q_s}\right)-\overset{*}{r}'_{c_2}\cdot\frac{\partial\overset{*}{r}'_{c_2}}{\partial q_s}\right\}\\&=M_2\left\{r'_{c_2}\cdot\frac{\partial r'_{c_2}}{\partial q_s}+(\omega\times\overset{*}{r}'_{c_2})\cdot\frac{\partial r'_{c_2}}{\partial q_s}\right.\\&\left.\quad+\overset{*}{r}'_{c_2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial r'_{c_2}}{\partial q_s}-\overset{*}{r}'_{c_2}\cdot\frac{\partial\overset{*}{r}'_{c_2}}{\partial q_s}\right\}\end{aligned}$$

利用变换(1.2.3)，我们得到

$$\varepsilon_s(T_r)=M_2\overset{**}{r}'_{c_2}\cdot\frac{\partial r'_{c_2}}{\partial q_s} \tag{1.7.24}$$

方程(1.7.22)取形式

$$M_2 a_{c_2}\cdot\frac{\partial r'_{c_2}}{\partial q_s}=Q_s\quad(s=1,\ 2,\ 3) \tag{1.7.25}$$

其中被载体质心的绝对加速度矢量 a_{c_2} 由表达式(1.7.16)确定。

3．被载体相对转动方程 下面研究被载体对角坐标 q_4，q_5，q_6 的运动方程，由(1.7.20)求得

$$\frac{\partial H^0}{\partial q_s}=0,\ \frac{\partial H^\omega}{\partial q_s}=-\frac{1}{2}\omega\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial q_s}\cdot\omega\quad(s=4,5,6) \tag{1.7.26}$$

惯量张量对坐标的导数据关系(1.7.10)容易求得。为此，注

于(1.7.11)，我们有

$$\varepsilon_s^*(K_r^*)=(\theta_2\cdot e_s)^*-\frac{\partial}{\partial q_s}(\theta_2\cdot\omega')$$
$$=\theta_2\cdot\overset{*}{e}_s+\overset{*}{\theta}_2\cdot e_s-\frac{\partial\theta_2}{\partial q_s}\cdot\omega'-\theta_2\cdot\frac{\partial\omega'}{\partial q_s}\tag{1.7.33}$$

还要计算$\overset{*}{e}_s$。由被载体坐标轴方向单位矢量的导数公式，有

$$(i_k')^*=\omega'\times i_k',\qquad \frac{\partial i_k'}{\partial q_s}=e_s\times i_k'\qquad(k=1,\ 2,\ 3)\tag{1.7.34}$$

因为矢量i_k'仅依赖于广义坐标，我们有

$$\frac{\partial}{\partial q_s}(i_k')^*=\left(\frac{\partial i_k'}{\partial q_s}\right)^*$$

将(1.7.34)代入上式，得到

$$\frac{\partial\omega'}{\partial q_s}\times i_k'+\omega'\times(e_s\times i_k')=\overset{*}{e}_s\times i_k'+e_s\times(\omega'\times i_k')$$

考虑到恒等式

$$e_s\times(\omega'\times i_k')-\omega'\times(e_s\times i_k')=i_k'\times(\omega'\times e_s)$$

上述关系可写成形式

$$\left(\overset{*}{e}_s-\frac{\partial\omega'}{\partial q_s}-\omega'\times e_s\right)\times i_k'=0\qquad(k=1,\ 2,\ 3)$$

由此得出

$$\overset{*}{e}_s=\frac{\partial\omega'}{\partial q_s}+\omega'\times e_s\qquad(s=4,\ 5,\ 6)\tag{1.7.35}$$

利用(1.7.10)、(1.7.30)、(1.7.17)和(1.7.35)，则(1.7.33)变换为

$$\varepsilon_s(K_r^*)=\theta_2\cdot(\omega'\times e_s)+(\omega'\times\theta_2-\theta_2\times\omega')\cdot e_s$$

$$-(\boldsymbol{e}_s\times\theta_2-\theta_2\times\boldsymbol{e}_s)\cdot\omega'$$
$$=(2\theta_2-\mathsf{E}\vartheta_2)\cdot(\boldsymbol{e}_s\times\omega') \tag{1.7.36}$$

而广义陀螺力是

$$\Gamma_s=2\omega\cdot\left(\theta_2-\frac{1}{2}\mathsf{E}\vartheta_2\right)\cdot(\omega'\times\boldsymbol{e}_s)\quad(s=4,\ 5,\ 6) \tag{1.7.37}$$

由(1.2.17)和(1.7.27)得到陀螺系数 γ_{sk}

$$\gamma_{sk}=2\omega\cdot\left(\theta_2-\frac{1}{2}\mathsf{E}\vartheta_2\right)\cdot(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{e}_s)\ (k,s=4,5,6) \tag{1.7.38}$$

被载体转动的微分方程成为

$$\varepsilon_s(T_r)=Q_s+(\omega\times\boldsymbol{e}_s)\cdot\theta_2\cdot\omega-\dot{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}_2\cdot\boldsymbol{e}_s$$
$$+2\omega\cdot\left(\boldsymbol{\theta}_2-\frac{1}{2}\mathsf{E}\vartheta_2\right)\cdot(\omega'\times\boldsymbol{e}_s)\quad(s=4,\ 5,\ 6) \tag{1.7.39}$$

剩下的是要展开这个方程的左边。利用(1.7.23)、(1.7.10)、(1.7.30)和(1.7.35)，求得

$$\varepsilon_s(T_r)=(\boldsymbol{e}_s\cdot\theta_2\cdot\omega')^*-\frac{\partial\boldsymbol{\omega}'}{\partial q_s}\cdot\theta_2\cdot\boldsymbol{\omega}'-\frac{1}{2}\omega'\cdot\frac{\partial\theta_2}{\partial q_s}\cdot\boldsymbol{\omega}$$
$$=\boldsymbol{e}_s\cdot\theta_2\cdot\overset{*}{\omega}'+\boldsymbol{e}_s\cdot(\omega'\times\theta_2-\theta_2\times\omega')\cdot\omega'+(\omega'$$
$$\times\boldsymbol{e}_s)\cdot\theta_2\cdot\omega'-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}'\cdot(\boldsymbol{e}_s\times\theta_2-\theta_2\times\boldsymbol{e}_s)\cdot\omega'$$
$$=\boldsymbol{e}_s\cdot(\theta_2\cdot\overset{*}{\omega}'+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\theta}_2\cdot\boldsymbol{\omega}') \tag{1.7.40}$$

现在(1.7.39)可过渡到形式

$$\boldsymbol{e}_s\cdot\left\{\theta_2\cdot\overset{*}{\omega}'+\omega'\times\theta_2\cdot\omega'+\omega\times\theta_2\cdot\omega+\theta_2\cdot\dot{\omega}\right.$$
$$\left.2\boldsymbol{\omega}'\times\left(\theta_2-\frac{1}{2}\mathsf{E}\vartheta_2\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\right\}=Q_s \tag{1.7.41}$$

投影方程，这三个方程用一个矢量方程替代为

$$M_2\{\overset{+}{\boldsymbol{v}}_r+\omega'\times\boldsymbol{v}_r+\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\omega\times\boldsymbol{v}_0+\dot{\omega}\times\boldsymbol{r}'_{c_2}$$
$$+\omega\times(\omega\times\boldsymbol{r}'_{c_2})+2\omega\times\boldsymbol{v}_r\}=\boldsymbol{V}_2 \qquad (1.7.47)$$

其中 $\boldsymbol{v}=\overset{*}{\boldsymbol{r}}'_{c_2}$ 为点 C_2 的相对速度矢量。

在转动方程中 Q_s 用主矩 $\boldsymbol{m}^{c_2}$ 在被载体轴上投影来替代，矢量 $\boldsymbol{e}_s$ 用单位矢量 $\boldsymbol{i}'_s$ 替代，被载体转动方程可归结为一个矢量方程

$$\theta_2\cdot(\overset{*}{\omega}+\overset{*}{\omega}')+\omega\times\theta_2\cdot\omega+\omega'\times\theta_2\cdot\omega'+2\omega'$$
$$\times\left(\theta_2-\frac{1}{2}\mathrm{E}\vartheta_2\right)\cdot\omega=\boldsymbol{m}^{c_2} \qquad (1.7.48)$$

§1.8 例 子

例 1 考虑地球自转时刚体定点转动方程

与载体(地球)相联的坐标系为 $oxyz$，轴向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，原点 O 在地球表面上，并作为与刚体相联的坐标系 $ox'y'z'$ 的极点。运动方程（1.7.48）是在假定被载体质心取为极点下得到的；它们也可应用于相对载体不动的极点的情形($\boldsymbol{v}_r=0$)。

假设轴系 $ox'y'z'$ 取为在极点 O 的惯性主轴，于是

$$\theta^0=A\boldsymbol{i}'_1\boldsymbol{i}'_1+B\boldsymbol{i}'_2\boldsymbol{i}'_2+C\boldsymbol{i}'_3\boldsymbol{i}'_3 \qquad (1.8.1)$$

载体角速度矢量 ω 在大小和方向上都是不变的。在方程(1.7.48)中需取 $\overset{*}{\omega}=0$。角速度 ω 在被载体轴系上投影用 $\tilde{\omega}_s$ 表记，而在 $oxyz$ 上投影用 ω_s 表示。于是

$$\tilde{\omega}_s=\omega\cdot\boldsymbol{i}'_s=\sum_{k=1}^{3}\omega_k\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{i}'_s \qquad (1.8.2)$$

并且因 $oxyz$ 指向北、西、天，有

$$\omega_1=U\cos\Phi,\ \omega_2=0,\ \omega_3=U\sin\Phi \qquad (1.8.3)$$

其中Φ为地点纬度，U为地球角速度。

在方程(1.7.48)中由 Coriolis 加速度引起的项是

$$
\begin{aligned}
&2\boldsymbol{\omega}'\times\left(\boldsymbol{\theta}_2-\frac{1}{2}E\vartheta_2\right)\cdot\boldsymbol{\omega}\\
&=\boldsymbol{\omega}'\times\{2(A\boldsymbol{i}'_1\boldsymbol{i}'_1+B\boldsymbol{i}'_2\boldsymbol{i}'_2+C\boldsymbol{i}'_3\boldsymbol{i}'_3)-(\boldsymbol{i}'_1\boldsymbol{i}'_1+\boldsymbol{i}'_2\boldsymbol{i}'_2\\
&\quad+\boldsymbol{i}'_3\boldsymbol{i}'_3)(A+B+C)\}\cdot\boldsymbol{\omega}\\
&=(\omega'_1\boldsymbol{i}'_1+\omega'_2\boldsymbol{i}'_2+\omega'_3\boldsymbol{i}'_3)\times\{(A-B-C)\boldsymbol{i}'_1\boldsymbol{i}'_1+(B-C\\
&\quad-A)\boldsymbol{i}'_2\boldsymbol{i}'_2+(C-A-B)\boldsymbol{i}'_3\boldsymbol{i}'_3\}\cdot(\tilde{\omega}_1\boldsymbol{i}'_1+\tilde{\omega}_2\boldsymbol{i}'_2+\tilde{\omega}_3\boldsymbol{i}'_3)\\
&=\{\omega'_2\tilde{\omega}_3(C-A-B)-\omega'_3\tilde{\omega}_2(B-C-A)\}\boldsymbol{i}'_1\\
&\quad+\{\omega'_3\tilde{\omega}_1(A-B-C)-\omega'_1\tilde{\omega}_3(C-A-B)\}\boldsymbol{i}'_2\\
&\quad+\{\omega'_1\tilde{\omega}_2(B-C-A)-\omega'_2\tilde{\omega}_1(A-B-C)\}\boldsymbol{i}'_3
\end{aligned}
\tag{1.8.4}
$$

又

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\theta}_2\cdot(\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}+\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}')+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\theta}_2\cdot\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}'\times\boldsymbol{\theta}_2\cdot\boldsymbol{\omega}'\\
&=(A\boldsymbol{i}'_1\boldsymbol{i}'_1+B\boldsymbol{i}'_2\boldsymbol{i}'_2+C\boldsymbol{i}'_3\boldsymbol{i}'_3)\cdot(\dot{\omega}'_1\boldsymbol{i}'_1+\dot{\omega}'_2\boldsymbol{i}'_2+\dot{\omega}'_3\boldsymbol{i}'_3)\\
&\quad+(\tilde{\omega}_1\boldsymbol{i}_1+\tilde{\omega}_2\boldsymbol{i}'_2+\tilde{\omega}_3\boldsymbol{i}_3)\times(A\boldsymbol{i}'_1\boldsymbol{i}'_1+B\boldsymbol{i}'_2\boldsymbol{i}'_2+C\boldsymbol{i}'_3\boldsymbol{i}'_3)\\
&\quad\times(\tilde{\omega}_1\boldsymbol{i}'_1+\tilde{\omega}_2\boldsymbol{i}'_2+\tilde{\omega}_3\boldsymbol{i}'_3)+(\omega'_1\boldsymbol{i}'_1+\omega'_2\boldsymbol{i}'_2+\omega'_3\boldsymbol{i}'_3)\\
&\quad\times(A\boldsymbol{i}'_1\boldsymbol{i}'_1+B\boldsymbol{i}'_2\boldsymbol{i}'_2+C\boldsymbol{i}'_3\boldsymbol{i}'_3)\cdot(\omega'_1\boldsymbol{i}'_1+\omega'_2\boldsymbol{i}'_2+\omega'_3\boldsymbol{i}'_3)\\
&=\{A\dot{\omega}'_1+(C-B)\omega'_2\omega'_3+(C-B)\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3\}\boldsymbol{i}'_1\\
&\quad+\{B\dot{\omega}'_2+(A-C)\omega'_1\omega'_3+(A-C)\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_3\}\boldsymbol{i}'_2\\
&\quad+\{C\dot{\omega}'_3+(B-A)\omega'_1\omega'_2+(B-A)\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2\}\boldsymbol{i}'_3
\end{aligned}
$$

将此式及(1.8.4)代入方程(1.7.48)，得到

$$\left.\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_1'+(C-B)(\omega_2'\omega_3'+\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3)+A(\tilde{\omega}_2\omega_3'\\
&-\tilde{\omega}_3\omega_2')+(C-B)(\omega_2'\tilde{\omega}_3+\omega_3'\tilde{\omega}_2)=m_1\\
&B\dot{\omega}_2'+(A-C)(\omega_3'\omega_1'+\tilde{\omega}_3\tilde{\omega}_1)+B(\tilde{\omega}_3\omega_1'\\
&-\tilde{\omega}_1\omega_3')+(A-C)(\omega_3'\tilde{\omega}_1+\omega_1'\tilde{\omega}_3)=m_2\\
&C\dot{\omega}_3'+(B-A)(\omega_1'\omega_2'+\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2)+C(\tilde{\omega}_1\omega_2'\\
&-\tilde{\omega}_2\omega_1')+(B-A)(\omega_1'\tilde{\omega}_2+\omega_2'\tilde{\omega}_1)=m_3
\end{aligned}\right\}\qquad(1.8.5)$$

在方程(1.8.5)中应去掉由离心惯性力所引起的带$\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3$，$\tilde{\omega}_3\tilde{\omega}_1$和$\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2$的项，因这些项与$U^2$成比例。于是方程(1.8.5)成为

$$\left.\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_1'+(C-B)(\omega_2'\omega_3'+\omega_2'\tilde{\omega}_3+\omega_3'\tilde{\omega}_2)\\
&+A(\tilde{\omega}_2\omega_3'-\tilde{\omega}_3\omega_2')=m_1\\
&B\dot{\omega}_2'+(A-C)(\omega_3'\omega_1'+\omega_3'\tilde{\omega}_1+\omega_1'\tilde{\omega}_3)\\
&+B(\tilde{\omega}_3\omega_1'-\tilde{\omega}_1\omega_3')=m_2\\
&C\dot{\omega}_3'+(B-A)(\omega_1'\omega_2'+\omega_1'\tilde{\omega}_2+\omega_2'\tilde{\omega}_1)\\
&+C(\tilde{\omega}_1\omega_2'-\tilde{\omega}_2\omega_1')=m_3
\end{aligned}\right\}\qquad(1.8.6)$$

如不计地球自转的影响，即$\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_2=\tilde{\omega}_3=0$，$\omega_s'=\omega_s$，则方程(1.8.6)成为刚体定点运动的Euler动力学方程。

例2 一般方程(1.8.6)的应用例子

1° 方程的建立 我们研究地球自转对陀螺运动的影响。陀螺对称轴oz'的位置由角α，β确定，应用与陀螺"半联"的轴系$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{i}_3'$，用φ表示绕轴的自旋角(图1-7)。

方程(1.8.6)在轴系$ox'y'z'$与刚体固联情形下可写出来。因此成立(1.7.46)的第二个等式。现在应以

图1-7

$$\overset{*}{\dot{\omega}}{}' = \overset{+}{\dot{\omega}}{}' + \Lambda \times \omega' \tag{1.8.7}$$

来替代，其中$\overset{*}{\dot{\omega}}{}'$表示一矢量，它在轴 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}'$，$\boldsymbol{i}_3'$ 上的投影等于矢量 $\boldsymbol{\omega}'$在这些轴上投影的导数（如以前用 $\dot{\omega}_s'$ 表记）；半联轴的角速度矢量Λ 不同于ω'，其中没有自旋分量

$$\Lambda = \omega' - \boldsymbol{i}_3'\dot{\varphi} \tag{1.8.8}$$

于是

$$\overset{*}{\dot{\omega}}{}' = \dot{\omega}' - \boldsymbol{i}_3'\dot{\varphi} \times \omega' = \overset{+}{\dot{\omega}}{}' - \dot{\varphi}\boldsymbol{n}'\omega_1' + \dot{\varphi}\boldsymbol{n}\omega_2'$$

并且出现于方程(1.8.6)中的量$\dot{\omega}_1'$，$\dot{\omega}_2'$，$\dot{\omega}_3'$应该用量$\dot{\omega}_1' + \dot{\varphi}\omega_2'$，$\dot{\omega}_2' - \dot{\varphi}\omega_1'$，$\dot{\omega}_3'$来替代。

轴ξ，η，ζ现在指向北、西及铅垂线。因此，由(1.8.2)和(1.8.3)求得

$$\omega_n = \tilde{\omega}_1 = U(-\sin\Phi\sin\beta + \cos\Phi\cos\beta) = U\cos(\Phi+\beta)$$

$$\omega_{n'} = \tilde{\omega}_2 = -U\sin(\Phi+\beta)\sin\alpha$$

$$\omega_{i_3'} = \tilde{\omega}_3 = U\sin(\Phi+\beta)\cos\alpha$$

陀螺重力对支点的矩等于

$$m^\circ = -i'_3 z' \times e_3 Q = Qz'(-n\sin\beta - n'\sin\alpha\cos\beta + i'_3\cos\alpha\cos\beta) \times i'_3 = Qz'(n'\sin\beta - n\sin\alpha\cos\beta)$$

再考虑到 $A=B$，可将方程(1.8.6)引向形式

$$\left.\begin{aligned} & A(\dot{\omega}'_1 + \dot{\varphi}\omega'_2 + \tilde{\omega}_2\omega'_3 - \tilde{\omega}_3\omega'_2) \\ & \quad + (C-A)(\omega'_2\omega'_3 + \omega'_2\tilde{\omega}_3 + \omega'_3\tilde{\omega}_2) \\ & = -Qz'\sin\alpha\cos\beta \\ & A(\dot{\omega}'_2 - \dot{\varphi}\omega'_1 + \tilde{\omega}_3\omega'_1 - \tilde{\omega}_1\omega'_3) \\ & \quad - (C-A)(\omega'_1\omega'_3 + \omega'_3\tilde{\omega}_1 \\ & \quad + \omega'_1\tilde{\omega}_3) = Qz'\sin\beta \\ & C(\dot{\omega}'_3 + \tilde{\omega}_1\omega'_2 - \tilde{\omega}_2\omega'_1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.8.9}$$

2°近乎铅直情形　在近乎铅直的陀螺情形，α 和 β 以及角速度矢量的投影 ω'_1，ω'_2 是小量；与 U 成比例的量 $\tilde{\omega}$，也是小量。舍去所有小量的乘积，则方程(1.8.9)成为

$$\left.\begin{aligned} & A(\dot{\omega}'_1 + \dot{\varphi}\omega'_2 + \tilde{\omega}_2\omega'_3) + (C-A)(\omega'_2 \\ & + \tilde{\omega}_2)\omega'_3 = -Qz'\alpha \\ & A(\dot{\omega}'_2 - \dot{\varphi}\omega'_1 - \tilde{\omega}_1\omega'_3) \\ & - (C-A)(\omega'_1 + \tilde{\omega}_1)\omega'_3 = Qz'\beta \\ & \qquad \dot{\omega}'_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.8.10}$$

再忽略小量乘积项，可取

$$\tilde{\omega}_1 = U\cos\Phi,\quad \tilde{\omega}_2 = 0,\quad \tilde{\omega}_3 = U\sin\Phi$$

$$\omega'_1 = -\dot{\alpha},\quad \omega'_2 = \dot{\beta},\quad \omega'_3 = \dot{\varphi}$$

因此，陀螺在(1.8.12)附近以频率(1.8.15)作小振动。(1.8.15)中根号内为正值才能使陀螺保持近乎铅垂位置，即要求

$$C\dot{\varphi} > 2\sqrt{QAz'} \tag{1.8.16}$$

例3 带旋转飞轮的刚体

1°刚体系统转动方程 设载体有一固定点 O。在点 O 联一坐标系 $Oxyz$。飞轮以角速度 $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{i}_3'\dot{\varphi}$ 绕在载体上固定的轴转动；飞轮质心在此轴上，它在载体上的位置矢径 $\boldsymbol{r}_c'$（前面用 $\boldsymbol{r}_{c_2}'$）给出。

在方程(1.7.16)中，现在有

$$\boldsymbol{v}_0 = 0,\quad \overset{*}{\boldsymbol{r}}{}_{c_2}' = 0,\quad \boldsymbol{a}_{c_2} = \boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c') + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_c'$$

于是

$$M_2\boldsymbol{r}_c'\times\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{\omega}\times M_2(\mathbf{E}\boldsymbol{r}_c'\cdot\boldsymbol{r}_c' - \boldsymbol{r}_c'\boldsymbol{r}_c')\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$+ M^2(\mathbf{E}\boldsymbol{r}_c'\cdot\boldsymbol{r}_c' - \boldsymbol{r}_c'\boldsymbol{r}_c')\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{1.8.17}$$

用 $\boldsymbol{\theta}^0$ 表示由载体和想象不动的飞轮所组成系统在点 O 的惯量张量

$$\boldsymbol{\theta}^0 = \boldsymbol{\theta}_1^0 + M_2(\mathbf{E}\boldsymbol{r}_c'\cdot\boldsymbol{r}_c' - \boldsymbol{r}_c'\boldsymbol{r}_c') + \boldsymbol{\theta}_2^c \tag{1.8.18}$$

将(1.8.17)、(1.8.18)代入(1.7.15)，并利用(1.7.19)，得到

$$\boldsymbol{\theta}^0\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi}^2\boldsymbol{i}_3'\times{}_2^c\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{i}_3'$$

$$+2\dot{\varphi}\boldsymbol{i}_3'\times\boldsymbol{\theta}_2^c\cdot\boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi}(\boldsymbol{\theta}_2^c - \mathbf{E}\theta_2^c)\cdot(\boldsymbol{i}_3'\times\boldsymbol{\omega})$$

$$+\boldsymbol{\theta}_2^c\cdot(\dot{\varphi}\boldsymbol{i}_3')^{\cdot} = \boldsymbol{m}^0 \tag{1.8.19}$$

飞轮是旋转刚体，用 $\theta_1 = \theta_2$，θ_3 表示主中心惯性矩，我们有

$$\boldsymbol{\theta}_2^c = \theta_1\mathbf{E} + (\theta_3 - \theta_1)\boldsymbol{i}_3'\boldsymbol{i}_3'$$

因此

$$\boldsymbol{i}_3'\times\boldsymbol{\theta}_2^c\cdot\boldsymbol{i}_3' = 0$$

$$\boldsymbol{\theta}_2^c\cdot(\dot{\varphi}\boldsymbol{i}_3')^{\cdot} = \boldsymbol{\theta}_2^c\cdot(\ddot{\varphi}\boldsymbol{i}_3' + \dot{\varphi}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}_3') = \theta_3\ddot{\varphi}\boldsymbol{i}_3'$$

$$+\theta_1\dot{\varphi}\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}_3'$$

以及

$$2\dot{\varphi}\,\boldsymbol{i}_3'\times\boldsymbol{\theta}_2^c\cdot\boldsymbol{\omega}+\dot{\varphi}\,(\boldsymbol{\theta}_2^c-\mathrm{E}\vartheta_2^c)\cdot(\boldsymbol{i}_3'\times\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\theta}_2^c\cdot(\dot{\varphi}\boldsymbol{i}_3')^{\cdot}$$

$$=2\theta_1\dot{\varphi}\,\boldsymbol{i}_3'\times\boldsymbol{\omega}+\dot{\varphi}\{\theta_1-(2\theta_1+\theta_3)\}\boldsymbol{i}_3'\times\boldsymbol{\omega}+\theta_3\,\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{i}_3'$$

$$+\theta_1\dot{\varphi}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}_3'$$

$$=\theta_3\ddot{\varphi}\boldsymbol{i}_3'+\theta_3\,\dot{\varphi}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}_3' \qquad (1.8.20)$$

于是方程(1.8.19)可写成

$$\boldsymbol{\theta}^0\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}+\theta_3\,(\ddot{\varphi}\boldsymbol{i}_3'+\dot{\varphi}\,\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}_3')=\boldsymbol{m}^0 \qquad (1.8.21)$$

取张量$\boldsymbol{\theta}^0$的主轴为$oxyz$的坐标轴，因此

$$\boldsymbol{\theta}^0=A\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+B\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2+C\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$$

此时，将方程(1.8.21)向这些轴上投影，我们得到三个微分方程

$$\left.\begin{aligned}&A\dot{\omega}_1+(C-B)\omega_2\omega_3+\theta_3\{\alpha\ddot{\varphi}+(\omega_2\gamma\\&\quad-\omega_3\beta)\,\dot{\varphi}\}=m_x^0\\&B\dot{\omega}_2+(A-C)\omega_3\omega_1+\theta_3\{\beta\ddot{\varphi}+(\omega_3\alpha\\&\quad-\omega_1\gamma)\,\dot{\varphi}\,\}=m_y^0\\&C\dot{\omega}_3+(B-A)\omega_1\omega_2+\theta_3\{\gamma\ddot{\varphi}+(\omega_1\beta\\&\quad-\omega_2\alpha)\,\dot{\varphi}\,=m_z^0\end{aligned}\right\}\qquad(1.8.22)$$

其中α，β，γ为方向$\boldsymbol{i}_3'$与轴系$oxyz$的夹角余弦。

2°被载体转动方程　被载体(飞轮)的转动方程按(1.7.41)组成。在选取的记号下，有

$$\boldsymbol{e}_\varphi=\frac{\partial\boldsymbol{\omega}'}{\partial\dot{\varphi}}=\boldsymbol{i}_3'$$

进而

$$\boldsymbol{i}_3' \cdot \boldsymbol{\theta}_2^c \cdot \overset{*}{\dot{\boldsymbol{\omega}}}{}' = \boldsymbol{i}_3' \cdot \{\theta_1 \mathrm{E} + (\theta_3 - \theta_1) \boldsymbol{i}_3' \boldsymbol{i}_3'\} \cdot \boldsymbol{i}_3' \ddot{\varphi} = \theta_3 \ddot{\varphi}$$

$$\boldsymbol{i}_3' \cdot \boldsymbol{\theta}_2^c \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{i}_3' \cdot \{\theta_1 \mathrm{E} + (\theta_3 - \theta_1) \boldsymbol{i}_3' \boldsymbol{i}_3'\} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}$$
$$= \theta_3 \ (\dot{\omega}_1 \alpha + \dot{\omega}_2 \beta + \dot{\omega}_3 \gamma)$$

公式(1.7.41)花括号中其余的组成与 $\boldsymbol{i}_3'$ 相垂直的矢量，而不出现于飞轮转动方程之中，飞轮转动方程取形式

$$\theta_3 \ (\ddot{\varphi} + \dot{\omega}_1 \alpha + \dot{\omega}_2 \beta + \dot{\omega}_3 \gamma) = Q_{\varphi} \qquad (1.8.23)$$

3°对 n 个飞轮的推广　当具有 n 个飞轮时，方程(1.8.22)和(1.8.23)可分别写成

$$\left.\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 + \sum_{k=1}^{n} \theta_3^k \{ \ddot{\varphi}_k \alpha_k \\
&\quad + \dot{\varphi}_k(\omega_2 \gamma_k - \omega_3 \beta_k)\} = m_x^0 \\
&B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_3\omega_1 + \sum_{k=1}^{n} \theta_3^k \{ \ddot{\varphi}_k \beta_k \\
&\quad + \dot{\varphi}_k(\omega_3 \alpha_k - \omega_1 \gamma_k)\} = m_y^0 \\
&C\dot{\omega}_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 + \sum_{k=1}^{n} \theta_3^k \{ \ddot{\varphi}_k \gamma_k \\
&\quad + \dot{\varphi}_k(\omega_1 \beta_k - \omega_2 \alpha_k)\} = m_z^0
\end{aligned}\right\} \qquad (1.8.24)$$

以及

$$\theta_3^k \ (\ddot{\varphi}_k + \dot{\omega}_1 \alpha_k + \dot{\omega}_2 \beta_k + \dot{\omega}_3 \gamma_k) = Q_{\varphi_k}$$
$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (1.8.25)$$

4°方程组的降阶问题　载体连同飞轮的动能为

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}_1^0 \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \ (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{i}_3' \dot{\omega}) \cdot \boldsymbol{\theta}_c^2 \cdot (\boldsymbol{\omega}$$

$$+\boldsymbol{i}_3'\dot{\varphi}) + \frac{1}{2}M_2|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_c'|^2$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\{\boldsymbol{\theta}_1^0+\boldsymbol{\theta}_2^c+M_2(\mathbf{E}\boldsymbol{r}_c'\cdot\boldsymbol{r}_c'-\boldsymbol{r}_c'\boldsymbol{r}_c')\}\cdot\boldsymbol{\omega}$$

$$+\frac{1}{2}\theta_3\dot{\varphi}^2+\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}_2^c\cdot\boldsymbol{i}_3'\dot{\varphi}$$

$$=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\theta_3\dot{\varphi}^2+\theta_3(\omega_1\alpha$$

$$+\omega_2\beta+\omega_3\gamma)\dot{\varphi}$$

有 n 个飞轮时为

$$T=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_3^k\{\dot{\varphi}_k^2+2(\omega_1\alpha_k$$

$$+\omega_2\beta_k+\omega_3\gamma_k)\dot{\varphi}_k\} \tag{1.8.26}$$

在方程(1.8.24)中主动力对轴系 $oxyz$ 的矩自然独立于飞轮转角 φ_k 而选取。认为广义力 $Q_{\varphi k}$ 依赖于表征载体位置和运动的量。此时坐标 φ_k 是准循环坐标(因广义力 Q_{φ_k} 异于零)，与此相关的广义动量为

$$p_k=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_k}=\theta_3^k\{\dot{\varphi}_k+(\omega_1\alpha_k+\omega_2\beta_k+\omega_3\gamma_k)\}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.8.27}$$

Routh 函数有形式

$$R=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\theta_3^k\left\{\frac{p_k}{\theta_3^k}-(\omega_1\alpha_k\right.$$

$$\left.+\omega_2\beta_k+\omega_3\gamma_k)\right\}^2 \tag{1.8.28}$$

由Routh 函数组成的 Euler—Lagrange 形式的方程为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \omega_1}-\omega_3\frac{\partial R}{\partial \omega_2}+\omega_2\frac{\partial R}{\partial \omega_3}=m_x^0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \omega_2}-\omega_1\frac{\partial R}{\partial \omega_3}+\omega_3\frac{\partial R}{\partial \omega_1}=m_y^0\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \omega_3}-\omega_2\frac{\partial R}{\partial \omega_1}+\omega_1\frac{\partial R}{\partial \omega_2}=m_z^0
\end{aligned}\right\}\tag{1.8.29}
$$

第一个方程为

$$
\begin{aligned}
&A\dot{\omega}_1+(C-B)\omega_2\omega_3+\sum_{k=1}^{n}[(\omega_2\gamma_k-\omega_3\beta_k)\{p_k\\
&-\theta_3^k(\omega_1\alpha_k+\omega_2\beta_k+\omega_3\gamma_k)\}+\alpha_k\{Q_{\varphi_k}\\
&-\theta_3^k(\dot{\omega}_1\alpha_k+\dot{\omega}_2\beta_k+\dot{\omega}_3\gamma_k)\}=m_x^0
\end{aligned}\tag{1.8.30}
$$

其他两个方程可用指标轮换得到。还要附加一些方程

$$
\dot{p}_k=Q_{\varphi_k}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{1.8.31}
$$

如果φ_k是循环坐标，那么就没有广义力了，广义动量p_k保持为常值。此时问题归结为研究三个方程(1.8.30)以及$\omega_1,\omega_2,\omega_3$用载体角坐标和相应的广义速度表示的三个运动学关系所组成的方程组。

现在研究一般情形，由三个方程(1.8.20)容易得到关系

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\{A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2-\sum_{k=1}^{n}\theta_3^k(\omega_1\alpha_k+\omega_2\beta_k\\
&+\omega_3\gamma_k)^2\}+\sum_{k=1}^{n}Q_{\varphi_k}(\omega_1\alpha_k+\omega_2\beta_k+\omega_3\gamma_k)\\
&=m_x^0\omega_1+m_y^0\omega_2+m_z^0\omega_3
\end{aligned}
$$

此关系式左边第一项乃是 Routh 函数的平方项部分R_2，第二项借助关系(1.8.31)和(1.8.27)可写成形式

$$\sum_{k=1}^{n} Q_{\varphi_k}(\omega_1 \alpha_k+\omega_2 \beta_k+\omega_3 \gamma_k)$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k^2}{\theta_3^k}-\sum_{k=1}^{n} Q_{\varphi_k}\dot{\varphi}_k$$

$$=-\frac{dR_0}{dt}-\sum_{k=1}^{n} Q_{\varphi_k}\dot{\varphi}_k$$

于是确定主动力功率的关系可写成

$$N=\sum_{k=1}^{n} Q_{\varphi_k}\dot{\varphi}_k+m_x^0\omega_1+m_y^0\omega_2+m_z^0\omega_3$$

$$=\frac{d}{dt}(R_2-R_0) \tag{1.8.32}$$

§1.9 相对运动的正则方程

1. 用正则变换建立正则方程 系统动能写成

$$T=\frac{1}{2}Mv_0^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega}+M(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{r}_c'$$

$$+M\boldsymbol{v}_0\cdot\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_c'}{\partial q_s}\dot{q}_s+\boldsymbol{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i'$$

$$\times\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}\dot{q}_s+T_r \tag{1.9.1}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i'(q_1, \cdots, q_n)$为点对与载体相固联的坐标系极点 o 的矢径，载体的运动由极点速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和角速度$\boldsymbol{\omega}$ 来确定，假设它们是给定的。$\boldsymbol{r}_c'$ 表示质心对原点在 o 的矢径。用 T_r 表示相对运动的动能，它是广义速度的二次形。

广义动量表达式为

$$p_s=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}=\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}+\omega\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i'\times\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}$$

$$+M\boldsymbol{v}_0\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_c'}{\partial q_s}\tag{1.9.2}$$

而Hamilton函数为

$$H=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L=T_2+\Pi-T_0=T_r^*+\Pi$$

$$-\frac{1}{2}\ \omega\cdot\theta^0\cdot\omega+M(\omega\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{r}_c'\tag{1.9.3}$$

因为出现于T中的项$\frac{1}{2}Mv_0^2$仅依赖于时间，故可舍去。量T_r^*是在表达式T_r中广义速度用广义动量替代所得结果。用$B=A^{-1}$表记二次形T_r系数矩阵A的逆矩阵，我们有

$$T_r'=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\ \sum_{k=1}^{n}B_{sk}\left(P_s-\omega\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i'\times\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}\right)$$

$$\times\left(P_k-\omega\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i'\times\frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_k}\right)\tag{1.9.4}$$

这里引进量

$$P_s=p_s-M\boldsymbol{v}_0\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_c'}{\partial q_s}=p_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(M\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{r}_c')$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{1.9.5}$$

如果再取

$$Q_s=q_s\qquad(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{1.9.6}$$

那么联系新变量P_s，Q_s与旧变量p_s，q_s的变换是正则形式的

$$Q_s=q_s,\ P_s=p_s-\frac{\partial F}{\partial q_s}$$

并且

$$F = M\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r}_c' = M(v_{01}x_c' + v_{02}y_c' + v_{03}z_c') \tag{1.9.7}$$

函数 F 对明显出现的 t 的导数等于

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M(\dot{v}_{01}x_c' + \dot{v}_{02}y_c' + \dot{v}_{03}z_c') = M\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 \cdot \boldsymbol{r}_c' \tag{1.9.8}$$

而对正则变量组的 Hamilton 函数 K 为

$$\begin{aligned} K &= H + \frac{\partial F}{\partial t} = T_r' + \Pi + \Pi^{\omega} + M\boldsymbol{r}_c' \cdot (\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0) \\ &= T_r' + \Pi + \Pi^{\omega} + \Pi^{0} \end{aligned} \tag{1.9.9}$$

其中 Π^{ω}，Π^{0} 分别为离心力和平动运动惯性力的势能。

相对运动的正则方程组可写成形式

$$\dot{q}_s = \frac{\partial K}{\partial P_s}, \quad \dot{P}_s = -\frac{\partial K}{\partial q_s} \qquad (s=1, 2, \cdots, n) \tag{1.9.10}$$

并且广义坐标取旧的表示。

2. 相对运动的正则方程 离心力和平动惯性力的作用表现在势能表达式中的项 Π^{ω} 和 Π^{0}。Coriolis 力和旋转惯性力不是有势力，它们由引进新的广义动量 P_s 而自动地考虑进去了。如果把 P_s 与相对运动中的广义动量

$$p_s^{(r)} = \frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s} \tag{1.9.11}$$

当作一回事，便是错误的。动能用这些量联合表示是二次形

$$T_r' = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B_{sk}p_s^{(r)}p_k^{(r)} \tag{1.9.12}$$

而与(1.9.4)比较，给出

$$P_s = p_s^{(r)} + \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i' \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s} \qquad (s=1, 2, \cdots, n) \tag{1.9.13}$$

因此

$$p_s = p_s^{(r)} + \sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\omega}\times r_i')\cdot\frac{\partial r_i'}{\partial q_s}$$

$$+\omega\cdot\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial r_i'}{\partial q_k}\times\frac{\partial r_i'}{\partial q_s}\right.$$

$$\left.+r_i'\times\frac{\partial^2 r_i'}{\partial q_k\partial q_s}\right)\dot{q}_k+\omega\cdot\sum_{i=1}^{N}\omega\times\left(m_i r_i'\times\frac{\partial r_i'}{\partial q_s}\right) \tag{1.9.14}$$

这里已利用微分关系

$$\dot{a}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial q_k}\dot{q}_k+\omega\times a$$

注意到

$$\omega\cdot\left\{\omega\times\left(r_i'\times\frac{\partial r_i'}{\partial q_s}\right)\right\}=0$$

则(1.9.14)可写成

$$p_s=p_s^{(r)}-Q_s^{\dot{\omega}}+\omega\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial r_i'}{\partial q_k}\times\frac{\partial r_i'}{\partial q_s}\right.$$

$$\left.+r_i'\times\frac{\partial^2 r_i'}{\partial q_k\partial q_s}\right)\dot{q}_k \tag{1.9.15}$$

正则方程(1.9.10)的第二组的右边部分有形式

$$-\frac{\partial K}{\partial q_s}=-\frac{\partial T_r'}{\partial q_s}-\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}-\frac{\partial \Pi^{\omega}}{\partial q_s}-\frac{\partial \Pi^{o}}{\partial q_s} \tag{1.9.16}$$

并且在计算由(1.9.4)给出的 T_r' 的导数时需考虑系数 B_{sk} 以及量 $\sum_{i=1}^{N}m_i r_i'\times\frac{\partial r_i'}{\partial q_s}$ 对 q_s 的依赖关系，因此按(1.9.4)、(1.9.13)以及方程(1.9.10)的第一组，有

参 考 文 献

[1] Whittaker.E.T, A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies with an introduction to the problem of three bodies, Cambridge, 1904.

[2] Лурье.А.И, Аналитическая Механика, ФМ, 1961.

[3] 梅凤翔，非完整系统力学基础，北京工业学院出版社，1985年。

[4] Mei Fengxiang, Liu Guilin, Dynamics of the relative motion of non-linear non-holonomic mechaical systems, P1262-1267. Proceedings of the international conference on nonlinear mechanics, Shanghai, 1985.

[5] 袁士杰，受匀速转动约束的非完整系统的运动微分方程，北京工业学院学报，1985年第四期。

[6] 梅凤翔，受匀速转动约束的非完整系统的广义 Nielsen 方程，全国第三次一般力学学术报告会，1984年11月。

[7] 梅凤翔，分析力学中的 Nielsen 算子和 Euler 算子，力学学报，第16卷第6期，P596-604，1984年。

够找到包含 $2n$ 个常数的通解

$$\left.\begin{aligned} q_s &= q_s(t;\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_n) \\ p_s &= p_s(t;\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_n) \\ & (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{2.1.3}$$

设由此方程组可解出 α_k，β_k

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_k(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ p_1,\ \cdots,\ p_n,\ t) \\ \beta_k &= \beta_k(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ p_1,\ \cdots,\ p_n,\ t) \\ & (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{aligned}\right\} \tag{2.1.4}$$

此时任何的 Poisson 括号

$$(\alpha_k,\ \alpha_s),\ (\alpha_k,\ \beta_s),\ (\beta_k,\ \beta_s) \tag{2.1.5}$$

按 Poisson 定理[3]，或者是常数(特殊情形等于零)，或者用这些量 α_k，β_k表出；任何一个括号既不显含 t，也不显含变量 q_s，p_s。按第一积分的 Poisson 条件[3]，有

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial t}+(\alpha_s,\ H_0)=0,\ \frac{\partial \beta_s}{\partial t}+(\beta_s,\ H_0)=0 \tag{2.1.6}$$

现在转向给定方程组(2.1.1)。所谓常数变易法是指原始方程(2.1.1)的通解可写成形式(2.1.3)，但假设 α_s 和 β_s 不是常数，而是时间的函数。这时方程(2.1.3)可当作新变量 α_s，β_s 向旧变量 q_s，p_s 的变换公式来研究，而方程(2.1.4)作为逆变换。

因方程(2.1.4)的形式不变，因此等式(2.1.6)保持着。而 Poisson 括号(2.1.5)也不改变形式。

需建立新变量按微分方程组(2.1.1)求对时间导数的表达式。将(2.1.4)求导数，得到

$$\dot{\alpha}_s=\frac{\partial \alpha_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \alpha_s}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)$$

$$=-(\alpha_s,\ H_0)+(\alpha_s,\ H)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \alpha_s}{\partial p_k}Q_k$$

这里已考虑到等式(2.1.6)，而 $\dot{q}_k$ 和 $\dot{p}_k$ 由方程(2.1.1)用其值替代。类似地可计算出 $\dot{\beta}_s$。我们导出方程组

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\alpha}_s &= (\alpha_s,\ H - H_0) + \sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_k} \\
\dot{\beta}_s &= (\beta_s,\ H - H_0) + \sum_{k=1}^{n} Q_k \frac{\partial \beta_s}{\partial p_k} \\
& (s = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)
\end{aligned}\right\} \tag{2.1.7}$$

我们称(2.1.7)为扰动运动方程。当然，方程(2.1.7)的右边要借助公式(2.1.3)用变量 α_k，β_k 表示出来。

2. 扰动运动方程的另一种形式 利用 Poisson 括号变换公式，可将方程(2.1.7)引向另一种形式。一般地，对旧坐标的 Poisson 括号为

$$(u,\ v)_{qp} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right)$$

而对旧坐标的偏导数可用对新坐标的偏导数表示出来：

$$\frac{\partial}{\partial q_k} = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_r}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial Q_r} + \frac{\partial P_r}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial P_r} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_k} = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_s}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial Q_s} + \frac{\partial P_s}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial P_s} \right)$$

将其代入并对 k 求和，得到

$$(u,\ v)_{qp} = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \left[\frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial Q_s} (Q_r,\ Q_s)_{qp} \right.$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial Q_r} \frac{\partial v}{\partial P_s} (Q_r,\ P_s)_{qp} + \frac{\partial u}{\partial P_r} \frac{\partial v}{\partial Q_s} (P_r,\ Q_s)_{qp}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial P_r}\frac{\partial v}{\partial P_s}(P_r, P_s)_{qp}\Big]$$

在上式用 α_s，β_s代替 Q_s，P_s，并用 α_s，$H-H_0$ 代替 u，v，得到

$$(\alpha_s, H-H_0)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\Big\{\frac{\partial\alpha_s}{\partial\alpha_r}\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_k}(\alpha_r, \alpha_k)$$

$$+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\alpha_r}\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\alpha_r, \beta_k)$$

$$+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\beta_k}\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_r}(\beta_k, \alpha_r)$$

$$+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\beta_r}\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\beta_r, \beta_k)\Big\}$$

注意到

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\alpha_r}=\delta_{sr}, \qquad \frac{\partial\alpha_s}{\partial\beta_r}=0$$

导出等式

$$(\alpha_s, H-H_0)=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_k}(\alpha_s, \alpha_k)+\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\alpha_s,\beta_k)\Big\} \tag{2.1.8}$$

类似地得到

$$(\beta_s, H-H_0)=\sum_{k=1}^{n}\Big\{\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_k}(\beta_s, \alpha_k)+\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\beta_s,\beta_k)\Big\} \tag{2.1.9}$$

将(2.1.8)和(2.1.9)代入(2.1.7)，得到

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{\alpha}_s &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_k}(\alpha_s,\ \alpha_k)\right. \\
&\quad \left. +\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\alpha_s,\ \beta_k)+\frac{\partial\alpha_s}{\partial p_k}Q_k\right\} \\
\dot{\beta}_s &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\alpha_k}(\beta_s,\ \alpha_k)\right. \\
&\quad \left. +\frac{\partial(H-H_0)}{\partial\beta_k}(\beta_s,\ \beta_k)+\frac{\partial\beta_s}{\partial p_k}Q_k\right\} \\
&\qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.1.10}
$$

这种写法的优点在于其中所出现的 Poisson 括号或是常数或用 α_k，β_k表出。

现在考虑微分方程组(2.1.1)用另一方程组(2.1.10)替代的问题：假设已知方程组(2.1.10)的解，那么按公式(2.1.3)马上可找到问题(2.1.1)的解。显然，当方程组(2.1.10)比原始方程容易求解(哪怕是近似的)时，这样的方法是富有成效的。

3.扰动方程的积分问题 如果适当选取辅助方程组(2.1.2)使得它与所研究方程组(2.1.1)仅相差一些二阶小项，那么近似解是有效的。这时量 α_k，β_k 在辅助方程解中是常数，在问题(2.1.1)中与常数相差甚微。这可由方程(2.1.10)看出，对时间的导数$\dot{\alpha}_s$，$\dot{\beta}_s$具有与假设的小量$H-H_0$，Q_k同阶小，因此，α_s，β_s是时间的慢变函数，而可用多项式近似方法，特别是 Picard 序列近似法求扰动方程组(2.1.10)的积分。为简单起见，方程(2.1.10)的右边用记号$\Phi_s(\alpha|\beta;\ t)$及$\Psi_s(\alpha|\beta;\ t)$来表示，由(2.1.10)得到

$$
\begin{aligned}
\alpha_s &= \alpha_s^0+\int_0^t\Phi_s(\alpha|\beta;\ t)\mathrm{d}t \\
\beta_s &= \beta_s^0+\int_0^t\Psi_s(\alpha|\beta;\ t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{2.1.11}
$$

其中 α_k^0，β_k^0为 α_k，β_k在 $t=0$ 时的值。如果 t 不大，(2.1.11)

被积函数中 α_k，β_k以其初始值 α_k^0，β_k^0替代，即慢变量以常数替代，则不致引起大的误差。于是问题归结为求积分

$$\alpha_s=\alpha_s^0+\int_0^t \Phi_s(\alpha^0|\beta^0;\ t)\mathrm{d}t$$

$$\beta_s=\beta_s^0+\int_0^t \psi_s(\alpha^0|\beta^0;\ t)\mathrm{d}t \qquad (2.1.12)$$

这个过程可以继续——按(2.1.12)确定的 α_s 和 β_s 重新代入(2.1.11)中。

为研究周期运动可用某时间间隔 T 内的平均值来代替扰动运动方程组的右边，即

$$\overline{\Phi}_s(\alpha|\beta)=\frac{1}{T}\int_0^T \overline{\Psi}_s(\alpha|\beta;\ t)\mathrm{d}t$$

$$\overline{\Psi}_s(\alpha|\beta)=\frac{1}{T}\int_0^T \overline{\Psi}_s(\alpha|\beta;\ t)\mathrm{d}t \qquad (2.1.13)$$

并且在计算积分时将 α_k，β_k 当作常数。这样，问题归结为研究方程组

$$\dot{\alpha}_s=\overline{\Phi}_s(\alpha|\beta),\ \dot{\beta}_s=\overline{\Psi}_s(\alpha|\beta)\ (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (2.1.14)$$

其中右边是小量且不依赖于时间。

§2.2 扰动运动的正则方程

1. 扰动运动方程的简化 当辅助方程组(2.1.2)的解(2.1.3)是量 α_k，β_k 到量 q_s，p_s 的正则变换时，扰动方程组可以简化。这在以下两种情形中成立：首先，当解(2.1.3)是微分方程组(2.1.2)的 Cauchy 积分时，那么 α_s，β_s 便是变量 q_s，p_s 的初值；其次，如果解(2.1.3)是正则方程组(2.1.2)的通积分，而通积分由 Hamilton-Jacobi 偏微分方程的全积分得到。

对正则变换，有

$$(\alpha_s,\ \alpha_k)=0,\ (\alpha_s,\ \beta_k)=\delta_{sk},\ (\beta_s,\ \beta_k)=0 \qquad (2.2.1)$$

由此可简化扰动方程(2.1.10)的形式，即得到

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\alpha}_s &= \frac{\partial(H-H_0)}{\partial \beta_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_k} Q_k \\
\dot{\beta}_s &= -\frac{\partial(H-H_0)}{\partial \alpha_s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \beta_s}{\partial p_k} Q_k \\
&\qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}
$$

特别地，如果

$$
Q_k = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)
$$

即方程(2.1.1)是正则的，那么扰动运动方程也是正则的：

$$
\dot{\alpha}_s = \frac{\partial(H-H_0)}{\partial \beta_s}, \quad \dot{\beta}_s = -\frac{\partial(H-H_0)}{\partial \alpha_s}
$$

$$
(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.2.3}
$$

2. **方程(2.2.2)和(2.2.3)的另一种形式** 由正则变换的第三类和第四类母函数，有关系[1]

$$
\left.\begin{aligned}
q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \\
q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}
$$

于是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_i \partial Q_s} &= -\frac{\partial q_i}{\partial Q_s} = -\frac{\partial P_s}{\partial p_i} \\
\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_i \partial P_s} &= -\frac{\partial q_i}{\partial P_s} = \frac{\partial Q_s}{\partial p_i}
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.5}
$$

对于所研究情形，(2.2.5)中的 Q_s，P_s用 α_s，β_s替代，便得

$$
\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_s} = \frac{\partial \beta_s}{\partial p_i}, \quad -\frac{\partial q_i}{\partial \beta_s} = \frac{\partial \alpha_s}{\partial p_i} \tag{2.2.6}
$$

将(2.2.6)代入(2.2.2)，得到

它们分别指向北和西。我们按关系(1.9.9)计算 Hamilton 函数 K，再由此组成正则方程(1.9.10)。为此，首先列写质点相对运动的动能，再研究重力势能以及平动惯性力和离心惯性力势能。

1. **$T_r^{\prime}$ 的计算** 将单位质点的相对运动动能写成形式(1.9.4)。我们有

$$\boldsymbol{\omega}=U(\boldsymbol{i}_1\sin\theta_0+\boldsymbol{i}_3\cos\theta_0)$$

其中 U 为地球角速度，$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_3$ 为轴 ox 和 oz 方向的单位矢量；以及

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{r}'\times\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial x}\right)=U(\boldsymbol{i}_1\sin\theta_0+\boldsymbol{i}_3\cos\theta_0)\cdot(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{i}_1)$$

$$=-Uy\cos\theta_0$$

类似地有

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{r}'\times\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial y}\right)=U(x\cos\theta_0-z\sin\theta_0)$$

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\boldsymbol{r}'\times\frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial z}\right)=Uy\sin\theta_0$$

于是

$$T_r^{\prime}=\frac{1}{2}[(P_1+Uy\cos\theta_0)^2+\{P_2-U(x\cos\theta_0-z\sin\theta_0)\}^2$$

$$+(P_3-Uy\sin\theta_0)^2] \tag{2.3.1}$$

2. **地球形状以及重力的势能** 地球表面形状问题在陀螺仪理论、人造地球卫星的运动以及其它动力学研究中有重要意义。另一方面，研究它可给出势能概念应用的原始例子。地球表面近似于标准椭球体曲面，此曲面是由地球引力和地球旋转产生的离心力合起来的重力场的水准面。标准椭球体与球体相差甚小，在下面计算中限于考虑这个偏差的一阶小量。

(1) 我们来研究引力的势能。首先研究两质点情形。

质量为 m_0 的质点(引力中心)对质量为 m 的质点 M 的引力为

$$F = -f\frac{mm_0}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.3.2}$$

其中 r 为两质点间距离，$\boldsymbol{r}$ 为引力中心至点 M 的矢径，f 为引力常数，力 $\boldsymbol{F}$ 为虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 上的元功为

$$\delta' A = -f\frac{mm_0}{r^3}\,\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

注意到 $\boldsymbol{r}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \delta(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})/2 = \delta r^2/2 = r\delta r$，我们有

$$\delta' A = -f\frac{mm_0}{r^2}\delta r = \delta\left(f\frac{mm_0}{r}\right)$$

于是两质点引力的势能为

$$\Pi = -f\frac{mm_0}{r} \tag{2.3.3}$$

(2) 其次，研究质点 M 被一有限尺寸离它足够远的物体吸引的势能。坐标原点取在物体质心 G 上，轴 Gx，Gy，Gz 指向惯性主轴方向。由(2.3.3)有

$$\Pi = -fm\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{r_i} \tag{2.3.4}$$

其中 m_i 为构成吸引物体的质点 M_i 的质量，r_i 为它到被吸引点 M 的距离。点 M_i 在物体上的位置由矢径 $\boldsymbol{\rho}_i = \overrightarrow{GM_i}$ 给出(图2-1)。令 $\overrightarrow{GM} = \boldsymbol{r}$，有 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{\rho}_i$，$r_i^2 = r^2 + \rho_i^2 - 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\rho}_i$ 进而

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\rho}_i}{r^2} + \frac{\rho_i^2}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{2.3.5}$$

注意到

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\rho}_i = xx_i + yy_i + zz_i,\quad \rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

其中 x，y，z 表示点 M 的坐标，x_i，y_i，z_i 表示点 M_i 的坐标，在表达式(2.3.5)中仅限于保留按 ρ_i/r 展开级数的平方项，则有

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\rho}_i}{r^2} - \frac{1}{2}\frac{\rho_i^2}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\rho}_i)^2}{r^4} + \cdots\right)$$

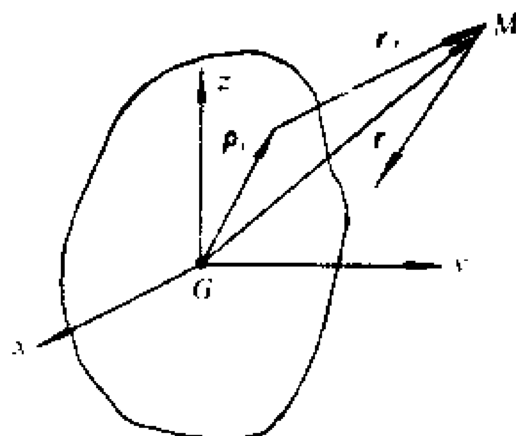


图 2-2

$$=\frac{1}{r}+\frac{x x_i+y y_i+z z_i}{r^3}-\frac{1}{2}\frac{x_i^2+y_i^2+z_i^2}{r^3}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{(x x_i+y y_i+z z_i)^2}{r^5}+\cdots$$

将此式代入(2.3.4)，考虑到坐标原点 G 为质心，即

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i=\sum_{i=1}^{N} m_i y_i=\sum_{i=1}^{N} m_i z_i=0$$

而坐标轴为惯性主轴，即

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i=\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i=\sum_{i=1}^{N} m_i z_i x_i=0$$

我们得到

$$\Pi=-fm\left\{\frac{m_0}{r}-\frac{1}{2r^3}\sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\right.$$

$$+\frac{3}{2}\frac{x^2}{r^5}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2+\frac{3}{2}\frac{y^2}{r^5}\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2$$

$$\left.+\frac{3}{2}\frac{z^2}{r^5}\sum_{i=1}^{N} m_i z_i^2+\cdots\right\}$$

其中m_0为物体质量。再注意到

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2=\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_3-\theta_1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2=\frac{1}{2}(\theta_3+\theta_1-\theta_2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i z_i^2=\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2-\theta_3)$$

其中θ_1，θ_2，θ_3为主中心惯性矩，我们得到

$$\Pi=-fm\left[\frac{m_0}{r}+\frac{1}{2r^5}\{(\theta_2+\theta_3-2\theta_1)x^2\right.$$

$$\left.+(\theta_3+\theta_1-2\theta_2)y^2+(\theta_1+\theta_2-2\theta_3)z^2\}\right]+\cdots \quad (2.3.6)$$

(3) 现在将一般公式(2.3.6)应用于地球情形。令r，θ，λ表示点的球坐标。假设标准椭球体是旋转刚体(oz为转轴)，并用$A=\theta_1=\theta_2$表示赤道惯性矩，用$C=\theta_3$表示极惯性矩，按(2.3.6)对单位质量质点($m=1$)的引力势能为

$$\Pi_1=-fM\left\{\frac{1}{r}+\frac{C-A}{2Mr^5}(x^2+y^2-2z^2)\right\}$$

$$=-fM\left\{\frac{1}{r}+\frac{C-A}{2Mr^3}(\sin^2\theta-2\cos^2\theta)\right\} \quad (2.3.7)$$

这里M代表地球质量。

(4) 当研究相对于与地球一起转动的坐标系的运动与平衡时，还必须考虑到离心力势能。地球旋转对单位质量质点的离心力势能等于

$$\Pi_2=-\frac{1}{2}U^2(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}U^2r^2\sin^2\theta \qquad (2.3.8)$$

(5) 将表达式(2.3.7)与(2.3.8)相加，引入称之为地球平均半径的 R_0，得到

$$\Pi=-\frac{fM}{R_0}\left[\frac{R_0}{r}+\frac{C-A}{2MR_0^2}\left(\frac{R_0}{r}\right)^3+\frac{U^2R_0^3}{2fM}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right.$$
$$\left.-\left\{\frac{3(C-A)}{2MR_0^2}\left(\frac{R_0}{r}\right)^3+\frac{U^2R_0^3}{2fM}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right\}\cos^2\theta\right]$$

在地球形状理论中取记号

$$\frac{U^2R_0^3}{fM}=m,\qquad \frac{3(C-A)}{2MR_0^2}+\frac{U^2R_0^3}{2fM}=\alpha \qquad (2.3.9)$$

于是前面等式写成

$$\Pi=-\frac{fM}{R_0}\left[\frac{R_0}{r}+\frac{1}{3}\left(\alpha-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{R_0}{r}\right)^3+\frac{m}{2}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right.$$
$$\left.-\left\{\left(\alpha-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{R_0}{r}\right)^3+\frac{m}{2}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right\}\cos^2\theta\right] \qquad (2.3.10)$$

或者

$$\Pi=-\frac{fM}{R_0}\left[\frac{R_0}{r}+\frac{m}{3}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2-\frac{2}{3}\left\{\left(\alpha-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{R_0}{r}\right)^3\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{m}{2}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right\}P_2(\cos\theta)\right] \qquad (2.3.11)$$

其中

$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) \qquad (2.3.12)$$

为 Legendre 二项式。

小量 m 和 α 的相乘项和平方项在下面计算中可略去。

量
$$\frac{fm}{R_0^2}=g_0 \qquad (2.3.13)$$

是“平均重力”加速度，所谓平均重力是指半径为 R_0 的不转地球的引力。因此

$$m=\frac{U^2R_0}{g_0} \tag{2.3.14}$$

等于离心力与在赤道的平均重力的比值。

(6) 上面引出的量 R_0 确定一球面 Σ_0 的半径，此球面对单位质量质点引力的势能 Π_0 等于势能 Π 在此球面上的平均值：

$$\Pi_0=\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{\Sigma_0}\Pi_{r=R_0}\mathrm{d}\sigma$$

其中

$$\mathrm{d}\sigma=R_0^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda$$

为球面 Σ_0 的面积元。因此，按(2.3.11)有

$$\begin{aligned}\Pi_0&=\frac{1}{4\pi R_0^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\lambda\int_0^{\pi}R_0^2\Pi_{r=R_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{fM}{2R_0}\left[\int_0^{\pi}\left(1+\frac{m}{3}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right.\\&\quad\left.-\frac{2}{3}\alpha\int_0^{\pi}P_2(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]\\&=\frac{fM}{R_0}\left(1+\frac{m}{3}\right)\end{aligned}$$

因按 Legendre 多项式的性质有

$$\int_0^{\pi}P_2(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$$

下面限于研究 Π 与 Π_0 的偏差

$$\begin{aligned}\Pi-\Pi_0=-\frac{fM}{R_0}&\left[\frac{R_0}{r}-1+\frac{m}{3}\left\{\left(\frac{r}{R_0}\right)^2-1\right\}\right.\\&\left.-\frac{2}{3}\left\{\left(\alpha-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{R_0}{r}\right)^3+\frac{m}{2}\left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right\}P_2(\cos\theta)\right]\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

标准椭球体这样确定：在其表面上势能等于平均地球球面Σ_0的势能。按此定义，用R^*表示标准椭球体表面的矢径，有

$$(H-H_0)_{r=R^*}=0 \qquad (2.3.16)$$

此方程确定R^*作为角θ的函数，其解写成

$$R^*=R_0\{1+\gamma(\theta)\}$$

量$\gamma(\theta)$表征标准椭球体与平均地球间的偏差，它与α和m同阶小。仅保留一阶小量，按(2.3.16)，得到

$$-\gamma(\theta)-\frac{2}{3}\alpha P_2(\cos\theta)=0$$

而标准椭球面的方程有形式

$$R^*=R_0\left\{1-\frac{2}{3}\alpha P_2(\cos\theta)\right\} \qquad (2.3.17)$$

在赤道和两极，即当$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\theta=0$时，有

$$(R^*)_{\theta=\pi/2}=a=R_0\left(1+\frac{\alpha}{3}\right),$$

$$(R^*)_{\theta=0}=c=R_0\left(1-\frac{2}{3}\alpha\right) \qquad (2.3.18)$$

量a和c称为标准椭球的赤道半径和极半径，α是压缩

$$\alpha=\frac{a-c}{R_0}\approx\frac{a-c}{a}$$

标准椭球体和平均地球体表面以平行圆相交，在此圆上$P_2(\cos\theta$变为零，即

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1}{3}},\quad \theta_1=35°16',\quad \theta_2=144°44'$$

可将标准椭球体方程写成

$$R^*=R_0\left(1+\frac{\alpha}{3}-\alpha\cos^2\theta\right)=a(1-\alpha\cos^2\theta) \qquad (2.3.19)$$

标准椭球面法线与转轴oz夹角记作θ^*(图2-2)。设ρ和z表示点的柱坐标，在标准椭球面上等于

$$\rho^* = a(1-\alpha\cos^2\theta)\sin\theta$$
$$z^* = a(1-\alpha\cos^2\theta)\cos\theta$$

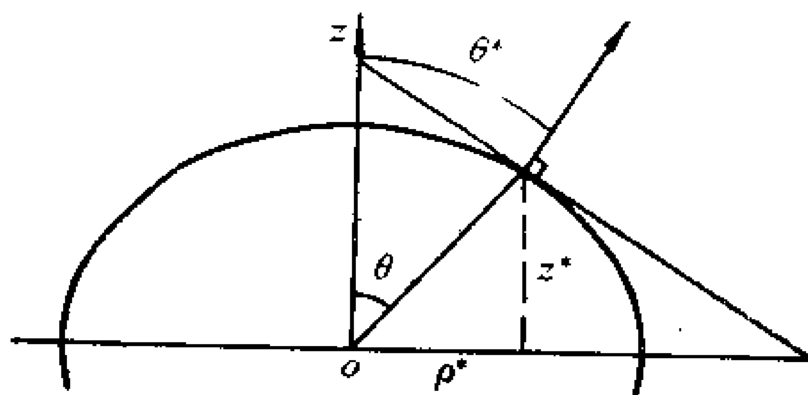


图2-2

因此

$$\operatorname{tg}\theta^* = -\frac{\mathrm{d}z^*}{\mathrm{d}\rho^*} = \frac{1-3\alpha\cos^2\theta}{1+2\alpha-3\alpha\cos^2\theta}\operatorname{tg}\theta \approx (1-2\alpha)\operatorname{tg}\theta$$

或者

$$\operatorname{tg}\theta^* - \operatorname{tg}\theta \approx \frac{\theta^*-\theta}{\cos^2\theta} = -2\alpha\operatorname{tg}\theta$$

$$\varepsilon = \theta - \theta^* = \alpha\sin 2\theta \tag{2.3.20}$$

(7) 转向计算在所研究势场中的力。力在球坐标中的投影为

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -\frac{\partial \Pi}{\partial r} = -g_0\left\{\left(\frac{R_0}{r}\right)^2 - \frac{2}{3}m\frac{r}{R_0}\right. \\ &\quad -(2\alpha-m)\frac{R_0^4}{r^4}P_2(\cos\theta) \\ &\quad \left. +\frac{2}{3}m\frac{r}{R_0}P_2(\cos\theta)\right\} \\ F_\theta &= -\frac{\partial \Pi}{r\partial\theta} = g_0\left\{\left(\alpha-\frac{m}{2}\right)\left(\frac{R_0}{r}\right)^4\right. \\ &\quad \left.+\frac{m}{2}\frac{r}{R_0}\right\}\sin 2\theta \\ F_\lambda &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.3.21}$$

其中 g_0 由(2.3.13)确定。在椭球面上的点，得到

$$\left.\begin{aligned}F_r^*&=-g_0\left\{1+\frac{\alpha}{3}-\frac{3}{2}m-\left(\alpha-\frac{5}{2}m\right)\cos^2\theta\right\}\\F_\theta^*&=g_0\alpha\sin2\theta\end{aligned}\right\}\tag{2.3.22}$$

重力在椭球面法向 $\boldsymbol{n}$ 和径线的切向 $\boldsymbol{\tau}$ 上的分量等于

$$F_n^*=F_r^*\cos\varepsilon-F_\theta^*\sin\varepsilon\approx F_r^*$$

$$F_\tau^*=F_r^*\sin\varepsilon+F_\theta^*\cos\varepsilon\approx-g_0\alpha\sin2\theta+F_\theta^*=0$$

后一结果作为验算，因为矢量 $\mathrm{grad}\,\Pi$ 沿水准面 $\Pi=\mathrm{const}$ 的法向。表达式 F_n^* 还可写成形式

$$F_n^*=-g_e(1+\beta\cos^2\theta)\tag{2.3.23}$$

其中

$$g_e=g_0\left(1+\frac{\alpha}{3}-\frac{2}{3}m\right)\tag{2.3.24}$$

为赤道上的重力加速度，常数 β 为

$$\beta=\frac{5}{2}m-\alpha\tag{2.3.25}$$

现组成标准椭球体在柱坐标 ρ^*，z^* 中的方程。按(2.3.19)有

$$\begin{aligned}R^{*2}&=\rho^{*2}+z^{*2}=a^2(1-\alpha\cos^2\theta)^2\approx a^2(1-2\alpha\cos^2\theta)\\&\approx a^2-2\alpha z^{*2}\end{aligned}$$

或者

$$\frac{\rho^{*2}}{a^2}+\frac{z^{*2}}{a^2}(1+2\alpha)=1$$

但按(2.3.18)，$a^2\approx c^2(1+2\alpha)$，因此

$$\frac{\rho^{*2}}{a^2}+\frac{z^{*2}}{c^2}=1\tag{2.3.26}$$

最后给出某些数据．常数

$$a=6378.4\mathrm{km},\ \alpha\approx\frac{1}{296.3}\approx0.003375\tag{2.3.27}$$

$$m=\frac{1}{288.4}=0.00347,\ \beta=0.00529 \tag{2.3.28}$$

由 a 和 m，按(2.3.9)求得

$$\frac{3}{2}\frac{C-A}{MR_0^2}=0.00164 \tag{2.3.29}$$

由岁差理论知

$$\frac{C-A}{C}=0.003275 \tag{2.3.30}$$

于是给出

$$\frac{C}{MR^2}=0.334 \tag{2.3.31}$$

而对匀质球来说为 0.4。这表明地球平均密度向地心增大。

3. (1.9.9)中其余诸项的计算 当 $m=1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}&=r'^2\omega^2-(\mathbf{r}'\cdot\boldsymbol{\omega})^2=U^2(x^2+y^2+z^2)\\&\quad-U^2(x\sin\theta_0+z\cos\theta_0)^2\\&=U^2\{(z\sin\theta_0-x\cos\theta_0)^2+y^2\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{r}'&=U\{\boldsymbol{i}_1\sin\theta_0+\boldsymbol{i}_3\cos\theta_0)\times(-\boldsymbol{i}_2R_0^*U\sin\theta_0)\}\cdot\boldsymbol{r}'\\&=U^2R_0^*\sin\theta_0(-z\sin\theta_0+x\cos\theta_0)\end{aligned}$$

因矢量 $\boldsymbol{v}_0$ 是起始坐标系极点的速度，是常矢量，它等于

$$\boldsymbol{v}_0=-\boldsymbol{i}_2R_0^*U\sin\theta_0$$

因此包含 $\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0$ 的项为零。我们得到

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}+m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{r}'&=-\frac{1}{2}U^2\{(z\sin\theta_0-x\cos\theta_0)^2\\&\quad+2R_0^*(z\sin\theta_0-x\cos\theta_0)\sin\theta_0+R_0^{*2}\sin^2\theta_0+y^2\}\\&\quad+\frac{1}{2}R_0^{*2}U^2\sin^2\theta_0\\&=-\frac{1}{2}U^2h^2+\text{const}\end{aligned}$$

并且，常数项可略去，用 h^2 表记点到地球转轴距离的平方

$$h^2=\{(R_0^*+z)\sin\theta_0-x\cos\theta_0\}^2+y^2$$

因此，量

$$\Pi_* = \Pi - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\theta\cdot\boldsymbol{\omega} + m(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{r}'$$

$$= \Pi - \frac{1}{2}U^2h^2 + \text{const} \tag{2.3.32}$$

据(2.3.8)乃是重力势能，即引力势能和离心力势能之和。Π_* 按等式(2.3.15)确定，其中引入点离地心的距离 r 以及点所处纬度的余角 θ。我们有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{i}_3 R_0^* + \boldsymbol{i}_1 x + \boldsymbol{i}_2 y + \boldsymbol{i}_3 z,$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\boldsymbol{i}_1\sin\theta_0 + \boldsymbol{i}_3\cos\theta_0)$$

而因此

$$r^2 = x^2 + y^2 + (R_0^* + z)^2$$

$$\cos\theta = \frac{1}{r}\{x\sin\theta_0 + (R_0^* + z)\cos\theta_0\}$$

其中，按(2.3.17)，有

$$R_0^* = R_0 - \frac{2}{3}\alpha R_0 P_2(\cos\theta_0)$$

并且 R_0 为地球平均半径，而 R_0^* 为标准椭球体在点 0 的半径。

我们有

$$\frac{r}{R_0} = \left\{1 + \frac{2z}{R_0} + \frac{x^2+y^2+z^2}{R_0^2} - \frac{4}{3}\alpha P_2(\cos\theta_0)\left(1+\frac{z}{R_0}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{z}{R_0} + \frac{x^2+y^2+z^2}{2R_0^2} - \frac{2}{3}\alpha P_2(\cos\theta_0)\left(1+\frac{z}{R_0}\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left\{\frac{4z^2}{R_0^2} + \frac{4z(x^2+y^2+z^2)}{R_0^3} - \frac{16}{3}\alpha P_2(\cos\theta_0)\frac{z}{R_0}\right\}$$

以后认为具有一阶小。

5. 简化方程及其解 简化方程组由$K^{(0)}$确定，即

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}=\frac{\partial K^{(0)}}{\partial P_1}=P_1,\quad \dot{y}=\frac{\partial K^{(0)}}{\partial P_2}=P_2,\\ \dot{z}=\frac{\partial K^{(0)}}{\partial P_3}=P_3,\\ \dot{P}_1=-\frac{\partial K^{(0)}}{\partial x}=0,\quad \dot{P}_2=-\frac{\partial K^{(0)}}{\partial y}=0,\\ \dot{P}_3=-\frac{\partial K^{(0)}}{\partial z}=-g_0\end{aligned}\right\}\tag{2.3.35}$$

这就是重质点在不计地球转动时的运动方程。它的解有形式

$$\left.\begin{aligned}P_1=\beta_1,\ P_2=\beta_2,\ P_3=-g_0t+\beta_3\\ x=\beta_1t+\alpha_1,y=\beta_2t+\alpha_2,z=\beta_3t-\frac{1}{2}g_0t^2+\alpha_3\end{aligned}\right\}\tag{2.3.36}$$

而α_i，β_i是方程组(2.3.35)的坐标和动量的初值。

6. 扰动运动方程 扰动方程(2.2.3)可借助Hamilton函数$K^{(1)}$组成，其中坐标和动量应以(2.3.36)替代：

$$\begin{aligned}K^{(1)}=U\{&(\beta_1\cos\theta_0-\beta_3\sin\theta_0)(\beta_2t+\alpha_2)\\ &-\beta_2(\beta_1t+\alpha_1)\cos\theta_0+g_0t(\beta_2t+\alpha_2)\sin\theta_0\\ &+\beta_2(\beta_3t+\alpha_3-\frac{1}{2}g_0t^2)\sin\theta_0\}+\frac{g_0}{2R_0}\Big\{(\beta_1t\\ &+\alpha_1)^2+(\beta_2t+\alpha_2)^2-2(\beta_3t+\alpha_3-\frac{1}{2}g_0t^2)^2\Big\}\end{aligned}\tag{2.3.37}$$

我们得到对量α_i的三个扰动运动的正则方程

$$
\left.\begin{aligned}
x&=\alpha_1^0+\beta_1^0t+U(\alpha_2^0t+\beta_2^0t^2)\cos\theta_0\\
&\quad-\frac{g_0}{R_0}\left(\beta_1^0\frac{t^3}{6}+\alpha_1^0\frac{t^2}{2}\right)\\
y&=\alpha_2^0+\beta_2^0t-U(\alpha_1^0t+\beta_1^0t^2)\cos\theta_0\\
&\quad+U(\alpha_3^0t+\beta_3^0t^2)\sin\theta_0\\
&\quad-\frac{g_0}{R_0}\left(\beta_2^0\frac{t^3}{6}+\alpha_2^0\frac{t^2}{2}\right)-\frac{1}{3}Ug_0t^3\sin\theta_0\\
z&=\alpha_3^0+\beta_3^0t-U(\alpha_2^0t+\beta_2^0t^2)\sin\theta_0\\
&\quad+\frac{2g_0}{R_0}\left(\beta_3^0\frac{t^3}{6}+\alpha_3^0\frac{t^2}{2}-\frac{g_0t^4}{24}\right)-\frac{1}{2}g_0t^2
\end{aligned}\right\}\tag{2.3.40}
$$

以及动量值

$$
\left.\begin{aligned}
P_1&=\beta_1^0+U\beta_2^0t\cos\theta_0-\frac{g_0}{R_0}\left(\beta_1^0\frac{t^2}{2}+\alpha_1^0t\right)\\
P_2&=\beta_2^0-U\beta_1^0t\cos\theta_0+U\beta_3^0t\sin\theta_0\\
&\quad-\frac{g_0}{R_0}\left(\beta_2^0\frac{t^2}{2}+\alpha_2^0t\right)-\frac{1}{2}Ug_0t^2\sin\theta_0\\
P_3&=\beta_3^0-U\beta_2^0t\sin\theta+\frac{2g_0}{R_0}\left(\beta_3^0\frac{t^2}{2}\right.\\
&\quad\left.+\alpha_3^0t-\frac{1}{6}g_0t^3\right)-g_0t
\end{aligned}\right\}\tag{2.3.41}
$$

单位质量质点的相对广义动量等于速度在坐标系 $oxyz$ 上投影 $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, 可按公式(1.9.13)计算。我们求得

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x}&=P_1+Uy\cos\theta_0\approx P_1+U(\alpha_2^0+\beta_2^0t)\cos\theta_0\\
\dot{y}&=P_2-U(x\cos\theta_0-z\sin\theta_0)\approx P_2\\
&\quad-U(\alpha_1^0+\beta_1^0t)\cos\theta_0+U(\alpha_3^0+\beta_3^0t)\sin\theta_0\\
&\quad-\frac{1}{2}Ug_0t^2\sin\theta_0\\
\dot{z}&=P_3-Uy\sin\theta_0\approx P_3-U(\alpha_2^0+\beta_2^0t)\sin\theta_0
\end{aligned}\right\}\tag{2.3.42}
$$

这些关系可由等式(2.3.40)求导数而得到。常数 α_1^0, α_2^0, α_3^0 是

坐标的初值，常数 β_1^0，β_2^0，β_3^0 由速度初值按以下关系确定

$$\dot{x}_0=\beta_1^0+U\alpha_2^0\cos\theta_0,\quad \dot{y}_0=\beta_2^0-U\alpha_1^0\cos\theta_0+U\alpha_3^0\sin\theta_0,$$
$$\dot{z}_0=\beta_3^0-U\alpha_2^0\sin\theta_0$$

例如，研究点靠近地面由高 h 处无初速地下落，此时有

$$\alpha_1^0=0,\ \alpha_2^0=0,\ \alpha_3^0=h,\ \beta_1^0=0,\ \beta_2^0=-Uh\sin\theta_0,\ \beta_3^0=0$$

并且忽略依赖于重力随高度改变的项，按(2.3.40)我们求得

$$\left.\begin{aligned}&x=-U^2ht^2\sin\theta_0\cos\theta_0\approx 0,\quad y=-\frac{1}{3}Ugt^3\sin\theta_0\\&z=h-\frac{1}{2}gt^2+U^2ht^2\sin^2\theta_0\approx h-\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}\right\}\tag{2.3.43}$$

与U^2 成比例的项在选取的计算精度上没有意义。我们得到落体东偏的表达式。

在铅垂上抛情形，初条件为

$$\alpha_1^0=0,\ \alpha_2^0=0,\ \alpha_3^0=0,\ \beta_1^0=0,\ \beta_2^0=0,\ \beta_3^0=\dot{z}_0$$

而由(2.3.40)得到

$$x=0,\ y=U\dot{z}_0t^2\sin\theta_0-\frac{1}{3}Ugt^3\sin\theta_0$$
$$z=\dot{z}_0t-\frac{1}{2}gt^2\tag{2.3.44}$$

在到达最大高度时刻，即当 $\dot{z}=0$ 时，西偏量为

$$y^*=\frac{2}{3}U\frac{\dot{z}_0^3}{g^2}\sin\theta_0\tag{2.3.45}$$

我们再研究由地面以速度 v_0 斜抛情形，v_0 与水平面成 δ 角，v_0 在水平面上投影与北向成 ε 角。此时

$$\alpha_1^0=0,\ \alpha_2^0=0,\ \alpha_3^0=0$$
$$\beta_1^0=v_0\cos\delta\cos\varepsilon,\ \beta_2^0=v_0\cos\delta\sin\varepsilon,$$
$$\beta_3^0=v_0\sin\delta$$

按公式(2.3.40)，我们得到

$$
\left.\begin{aligned}
x&=v_0t\cos\delta\cos\varepsilon+Uv_0t^2\cos\delta\sin\varepsilon\cos\theta_0\\
y&=v_0t\cos\delta\sin\varepsilon-Uv_0t^2\cos\delta\cos\varepsilon\cos\theta_0\\
&\quad+Uv_0t^2\sin\delta\sin\theta_0-\frac{1}{3}Ug_0t^3\sin\theta_0\\
z&=v_0t\sin\delta-Uv_0t^2\cos\delta\sin\varepsilon\sin\theta_0-\frac{1}{2}g_0t^2
\end{aligned}\right\}\quad(2.3.46)
$$

若轴 0ξ 在抛射平面上，轴 0η 与 0ξ 垂直且与西向成 ε 角，则由前两式得到

$$
\xi=v_0t\cos\delta+Uv_0t^2\sin\delta\sin\theta_0\sin\varepsilon-\frac{1}{3}Ug_0t^3\sin\theta_0\sin\varepsilon
$$

$$
\begin{aligned}
\eta=&-Uv_0t^2(\cos\delta\cos\theta_0-\sin\delta\sin\theta_0\cos\varepsilon)\\
&-\frac{1}{3}Ug_0t^3\sin\theta_0\cos\varepsilon
\end{aligned}
$$

后一式子确定对抛射平面的偏差。

§2.4 质点在阻尼介质中的运动

我们不计地球自转和重力随高度的变化。此时，对单位质量的质点，令轴 x 为水平，轴 y 铅垂向上，有

$$
H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+2gy)
$$

阻力与点的速度方向相反，在 ox 与 oy 上投影分别为

$$
F_x=-\frac{\dot{x}}{v}f(v),\ F_y=-\frac{\dot{y}}{v}f(v),\quad v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}
$$

并且 $\dot{x}=p_x$，$\dot{y}=p_y$。当不计阻力时，得到

$$
\begin{aligned}
&x=\alpha_1+\beta_1t,\ y=\alpha_2+\beta_2t-\frac{1}{2}gt^2,\ p_x=\beta_1\\
&\qquad p_y=\beta_2-gt
\end{aligned}\qquad(2.4.1)
$$

扰动运动方程(2.2.7)给出

$$
\dot{\alpha}_1=-F_x\frac{\partial x}{\partial\beta_1}-F_y\frac{\partial y}{\partial\beta_1},\quad\dot{\alpha}_2=-F_x\frac{\partial x}{\partial\beta_2}-F_y\frac{\partial y}{\partial\beta_2}
$$

$$\beta_1 = -F_x \frac{\partial x}{\partial \alpha_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}, \beta_2 = F_x \frac{\partial x}{\partial \alpha_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}$$

即

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= t\frac{\beta_1}{v}f(v), \quad \dot{\alpha}_2 = t\frac{\beta_2 - gt}{v}f(v) \\ \dot{\beta}_1 &= -\frac{\beta_1}{v}f(v), \quad \dot{\beta}_2 = -\frac{\beta_2 - gt}{v}f(v) \\ v &= \sqrt{\beta_1^2 + (\beta_2 - gt)^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.4.2}$$

如果阻力很小，那么在积分时可将方程右边中的 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 当作常数。此时有

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1^0 + \int_0^t \tau \frac{\beta_1^0}{v_*} f(v_*) \mathrm{d}\tau, \\ \alpha_2 &= \alpha_2^0 + \int_0^t \tau \frac{\beta_2^0 - g\tau}{v_*} f(v_*) \mathrm{d}\tau \\ \beta_1 &= \beta_1^0 - \int_0^t \beta_1^0 \frac{f(v_*)}{v_*} \mathrm{d}\tau, \\ \beta_2 &= \beta_2^0 - \int_0^t \frac{\beta_2^0 - g\tau}{v_*} f(v_*) \mathrm{d}\tau \end{aligned}\right\} \tag{2.4.3}$$

其中 $v_* = v(\tau)$，为求积分我们引入新变量 λ：

$$\tau = \frac{1}{g}(\beta_2^0 - \beta_1^0 \operatorname{sh}\lambda) \tag{2.4.4}$$

这时

$$v_* = \sqrt{\beta_1^{0\,2} + (\beta_2^0 - g\tau)^2} = \beta_1^0 \operatorname{ch}\lambda,$$

$$\mathrm{d}\tau = -\frac{\beta_1^0}{g} \operatorname{ch}\lambda \mathrm{d}\lambda \tag{2.4.5}$$

我们有

$$
\left.
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_1^0 + \left(\frac{\beta_1^0}{g}\right)^2 \int_{\mu_0}^{\mu} (\operatorname{sh}\lambda - \operatorname{sh}\mu_0) \\
&\quad \times f(\beta_1^0 \operatorname{ch}\lambda) \mathrm{d}\lambda \\
\alpha_2 &= \alpha_2^0 + \left(\frac{\beta_1^0}{g}\right)^2 \int_{\mu_0}^{\mu} (\operatorname{sh}\lambda - \operatorname{sh}\mu_0) \\
&\quad \times \operatorname{sh}\lambda f(\beta_1^0 \operatorname{ch}\lambda) \mathrm{d}\lambda \\
\beta_1 &= \beta_1^0 + \frac{\beta_1^0}{g} \int_{\mu_0}^{\mu} f(\beta_1^0 \operatorname{ch}\lambda) \mathrm{d}\lambda \\
\beta_2 &= \beta_2^0 + \frac{\beta_1^0}{g} \int_{\mu_0}^{\mu} \operatorname{sh}\lambda f(\beta_1^0 \operatorname{ch}\lambda) \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
\right\} \tag{2.4.6}
$$

其中 $\operatorname{sh}\mu_0 = \beta_2^0 / \beta_1^0$。

将(2.4.6)代入(2.4.1)，并令

$$
\operatorname{sh}\mu = \frac{1}{\beta_1^0} (\beta_2^0 - gt)
$$

则有

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \alpha_1^0 + \beta_1^0 t + \left(\frac{\beta_1^0}{g}\right)^2 \int_{\mu_0}^{\mu} (\operatorname{sh}\lambda \\
&\quad - \operatorname{sh}\mu) f(\beta_1^0 \operatorname{ch}\lambda) \mathrm{d}\lambda \\
y &= \alpha_2^0 + \beta_2^0 t - \frac{1}{2} g t^2 + \left(\frac{\beta_1^0}{g}\right)^2 \int_{\mu_0}^{\mu} (\operatorname{sh}\lambda \\
&\quad - \operatorname{sh}\mu) \operatorname{sh}\lambda f(\beta_1^0 \operatorname{ch}\lambda) \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}
\right\} \tag{2.4.7}
$$

这样，当给出具体的阻尼定律 $f(v)$，便可由(2.4.7)得到问题的解。

§2.5 不平衡性对陀螺的影响

1. 动能、势能与 Hamilton 函数 在近乎铅垂的陀螺上离对称轴 oz 很小距离 e 处联一质量为 m 的质点。要研究由此不平衡性对陀螺运动的影响，并且限于研究与偏心 e 一阶成比例的量。

陀螺位置由角 λ，μ，φ 来确定，其中 λ 为陀螺对称轴 oz 与固定平面 $o\xi\zeta$ 的夹角，μ 为 oz 在平面 $o\xi\zeta$ 上的投影与固定铅垂

轴 $o\xi$ 的夹角，φ 为自转角(图2-3)。

陀螺角速度在与其固联的坐标系 $oxyz$ 上的投影为

$$
\left.
\begin{aligned}
\omega_x &= -\dot{\lambda}\cos\varphi + \dot{\mu}\cos\lambda\sin\varphi \\
\omega_y &= \dot{\lambda}\sin\varphi + \dot{\mu}\cos\lambda\cos\varphi \\
\omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\mu}\sin\lambda
\end{aligned}
\right\}
$$

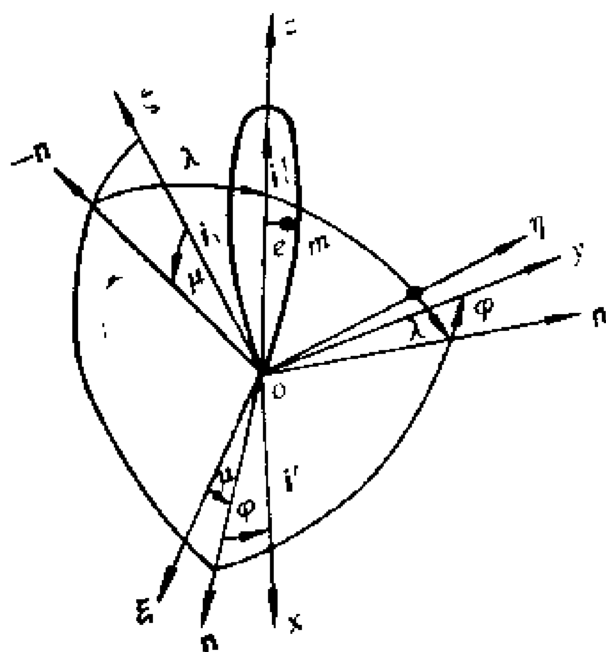


图2-3

陀螺的动能为

$$T_1 = \frac{1}{2}\{A_0(\dot{\lambda}^2 + \dot{\mu}^2\cos^2\lambda) + C(\dot{\varphi} + \dot{\mu}\sin\lambda)^2\}$$

其中 A_0 为陀螺的赤道惯性矩，C 为它的轴惯性矩。

设质量 m 在 $oxyz$ 中的坐标为 $x_0 = e\cos\varepsilon$，$y_0 = e\sin\varepsilon$，z_0，则它的动能为

$$T_2 = \frac{1}{2}m\{(\omega_y z_0 - \omega_z y_0)^2 + (\omega_z x_0 - \omega_x z_0)^2 + (\omega_x y_0 - \omega_y x_0)^2\}$$

$$+\dot{\mu}\cos\lambda\sin(\varphi+\varepsilon)\}$$

由此，忽略带 e^2 项，得到

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \frac{p_\lambda}{A} - \frac{mez_0}{AC} p_\varphi \cos(\varphi+\varepsilon) \\
\dot{\mu} &= \frac{p_\mu - p_\varphi \sin\lambda}{A\cos^2\lambda} + \frac{mez_0}{AC\cos\lambda} p_\varphi \sin(\varphi+\varepsilon) \\
\dot{\varphi} &= -\dot{\mu}\sin\lambda + \frac{p_\varphi}{C} + \frac{mez_0}{AC}\Big[-p_\lambda\cos(\varphi+\varepsilon) \\
&\quad + \frac{p_\mu - p_\varphi\sin\lambda}{\cos\lambda}\sin(\varphi+\varepsilon)\Big]
\end{aligned}\right\} \tag{2.5.3}
$$

而 Hamilton 函数的表达式为

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\left[\frac{p_\lambda^2}{A} + \frac{(p_\mu - p_\varphi\sin\lambda)^2}{A\cos^2\lambda} + \frac{p_\varphi^2}{C} + 2Qz_c^*\cos\lambda\cos\mu\right] \\
&\quad - \frac{mez_0}{AC}\left[p_\lambda p_\varphi \cos(\varphi+\varepsilon) - \frac{p_\mu - p_\varphi\sin\lambda}{\cos\lambda} p_\varphi \sin(\varphi+\varepsilon)\right] \\
&\quad - mge[\sin\mu\cos(\varphi+\varepsilon) + \sin\lambda\cos\mu\sin(\varphi+\varepsilon)] \\
&= H_0 + H_1
\end{aligned} \tag{2.5.4}
$$

对于近乎铅垂陀螺，有

$$\sin\mu\approx\mu,\quad \cos\mu\approx 1-\frac{\mu^2}{2},\quad \sin\lambda\approx\lambda,\quad \cos\lambda\approx 1-\frac{\lambda^2}{2}$$

于是

$$
\left.\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2}\Big[\frac{p_\lambda^2}{A} + \frac{(p_\mu - \lambda p_\varphi)^2}{A} + \frac{p_\varphi^2}{C} \\
&\quad - Qz_c^*(\lambda^2+\mu^2)\Big] \\
H_1 &= -\frac{mez_0}{AC}[p_\lambda p_\varphi \cos(\varphi+\varepsilon) \\
&\quad - (p_\mu - \lambda p_\varphi) p_\varphi \sin(\varphi+\varepsilon)] \\
&\quad - mge[\mu\cos(\varphi+\varepsilon) + \lambda\sin(\varphi+\varepsilon)]
\end{aligned}\right\} \tag{2.5.5}
$$

2. 未扰动运动方程和扰动运动方程 陀螺未扰动运动方程，由 H_0 构成为

$$\dot{\lambda}=\frac{p_\lambda}{A},\quad \dot{p}_\lambda=p_\varphi\frac{p_\mu-\lambda p_\varphi}{A}+Qz_c^*\lambda$$

$$\dot{\mu}=\frac{1}{A}(p_\mu-p_\varphi\lambda),\quad \dot{p}_\mu=Qz_c^*\mu$$

$$\dot{\varphi}=\frac{p_\varphi}{C}-\frac{p_\mu-p_\varphi\lambda}{A}\lambda,\quad \dot{p}_\varphi=0$$

将其写成复数形式

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\mu}+\mathrm{i}\,\dot{\lambda}=\frac{1}{A}(p_\mu-p_\varphi\lambda+\mathrm{i}\,p_\lambda)\\&(p_\mu-p_\varphi\lambda+\mathrm{i}p_\lambda)^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathrm{i}\frac{p_\varphi}{A}(p_\mu\\&-p_\varphi\lambda+\mathrm{i}p_\lambda)+Qz_c^*(\mu+\mathrm{i}\lambda)\\&p_\varphi=\beta_\varphi,\quad \dot{\varphi}=\frac{\beta_\varphi}{C}-\lambda\,\dot{\mu}\approx\frac{\beta_\varphi}{C}\end{aligned}\right\}\tag{2.5.6}$$

令二次方程

$$q^2-\frac{\beta_\varphi}{A}q+\frac{Qz_c^*}{A}=0\tag{2.5.7}$$

的根为 q_1，q_2，并用 α_μ，α_λ，β_μ，β_λ 表示坐标和动量的初值，则(2.5.6)前两个方程的积分为

$$\left.\begin{aligned}&\mu+\mathrm{i}\lambda=\frac{\alpha_\mu+\mathrm{i}\alpha_\lambda}{q_1-q_2}(q_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2t}-q_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1t})\\&+\mathrm{i}\frac{\beta_\mu-\beta_\varphi\alpha_\lambda+\mathrm{i}\beta_\lambda}{A(q_1-q_2)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1t})\\&\frac{1}{A}(p_\mu-p_\varphi\lambda+\mathrm{i}p_\lambda)=\frac{\alpha_\mu+\mathrm{i}\alpha_\lambda}{q_1-q_2}\mathrm{i}q_1q_2\\&\times(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2t}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1t})+\frac{\beta_\mu-\beta_\varphi\alpha_\lambda+\mathrm{i}\beta_\lambda}{A(q_1-q_2)}\\&\times(q_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_1t}-q_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_2t})\end{aligned}\right\}\tag{2.5.8}$$

$$+iq_1(\alpha_\mu-i\alpha_\lambda)(e^{-iq_1t}-e^{-iq_2t})e^{i\varphi}$$

$$+\frac{1}{A}(\beta_\mu-\beta_\varphi\alpha_\lambda+i\beta_\lambda)e^{i(q_2t-\varphi)}$$

$$-\frac{1}{A}(\beta_\mu-\beta_\varphi\alpha_\lambda-i\beta_\lambda)e^{-i(q_2t-\varphi)}\}$$

$$-\frac{1}{2}mge\{(\alpha_\mu+i\alpha_\lambda)e^{i(q_1t-\varphi)}+(\alpha_\mu-i\alpha_\lambda)e^{-i(q_1t-\varphi)}$$

$$+\frac{i}{Aq_2}(\beta_\mu-\beta_\varphi\alpha_\lambda+i\beta_\lambda)(e^{iq_1t}-e^{iq_2t})e^{-i\varphi}$$

$$-\frac{i}{Aq_2}(\beta_\mu-\beta_\varphi\alpha_\lambda-i\beta_\lambda)(e^{-iq_1t}-e^{-iq_2t})e^{i\varphi}\}$$

(2.5.13)

我们来组成扰动运动的正则方程

$$\dot{\alpha}_\mu=\frac{\partial H_1}{\partial\beta_\mu},\ \dot{\alpha}_\lambda=\frac{\partial H_1}{\partial\beta_\lambda},\ \dot{\beta}_\mu=-\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_\mu},\ \dot{\beta}_\lambda=-\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_\lambda}$$

注意到 H_1 依赖 β_μ，β_λ，α_μ，α_λ 是借助于量

$$\zeta_1=\beta_\mu-\beta_\varphi\alpha_\lambda+i\beta_\lambda,\ \zeta_2=\alpha_\mu+i\alpha_\lambda$$

以及它们的共轭量$\overline{\zeta_1}$，$\overline{\zeta_2}$的。因此

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta_\mu}=\frac{\partial H_1}{\partial\zeta_1}+\frac{\partial H_1}{\partial\overline{\zeta_1}},\qquad \frac{\partial H_1}{\partial\beta_\lambda}=i\left(\frac{\partial H_1}{\partial\zeta_1}-\frac{\partial H_1}{\partial\overline{\zeta_1}}\right)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_\mu}=\frac{\partial H_1}{\partial\zeta_2}+\frac{\partial H_1}{\partial\overline{\zeta_2}},\qquad \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_\lambda}=-\beta_\varphi\left(\frac{\partial H_1}{\partial\zeta_1}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial H_1}{\partial\overline{\zeta_1}}\right)+i\left(\frac{\partial H_1}{\partial\zeta_2}-\frac{\partial H_1}{\partial\overline{\zeta_2}}\right)$$

上述方程可写成形式

的振动的叠加。

转向于方程(2.5.14)，利用 q_1 比 q_2 小得多的假定，便可简化它。在这些方程右边的量 β_φ 和 α_φ 可当作常数来研究，并且 $\beta_\varphi/C=\dot{\varphi}_0$。用 $\varkappa$ 表示小参数 mez_0/A，我们得到

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{\alpha}_\mu+i\dot{\alpha}_\lambda=-i\varkappa e^{i\alpha_\varphi}\dot{\varphi}_0\left\{\left(1+\frac{A}{C}\frac{g}{z_0\dot{\varphi}_0^2}\right)e^{i\frac{A-C}{A}\dot{\varphi}_0 t}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{A}{C}\frac{g}{z_0\dot{\varphi}_0^2}e^{i\dot{\varphi}_0 t}\right\}\\
&\dot{\beta}_\mu-\beta_\varphi\dot{\alpha}_\lambda+i\dot{\beta}_\lambda=\varkappa e^{i\alpha_\varphi}C\dot{\varphi}_0^2\left(1+\frac{A}{C}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{g}{z_0\dot{\varphi}_0^2}\right)e^{i\frac{A-C}{A}\dot{\varphi}_0 t}
\end{aligned}\right\}\tag{2.5.17}
$$

由这些关系得知，当 $A=C$ 时，即在支点的惯性椭球是一球时，在扰动运动中出现与时间成正比的项。

§2.6 人造地球卫星绕质心的转动

1. 卫星的势能与动能 人造地球卫星绕其质心转动是一种扰动规则运动，这是扰动理论应用的有趣例子。

令 C 和 A 为卫星轴中心惯性矩和赤道中心惯性矩，卫星的运动在地球引力场中发生，这里假设地球是一匀质球。此时，按(2.3.6)，引力场势能等于

$$
\Pi=-\mu\left\{\frac{m_0}{r}+\frac{1}{2r^5}(C-A)(x^2+y^2-2z^2)\right\}
$$

其中 $\mu=fM$ 为引力常数与地球质量的乘积。x^2+y^2 用 r^2-z^2 替代，并且在 Π 中舍去不依赖于与卫星固联轴系方位的量，得到

$$
\Pi=\frac{3}{2}\mu(C-A)\frac{z^2}{r^5}\tag{2.6.1}
$$

用 $\boldsymbol{e}_r$ 表示由地心到卫星质心方向 $\overrightarrow{MG}$ 的单位矢量，$\boldsymbol{i}_3$ 为惯性椭球转轴 Gz 方向的单位矢量。它与 $\boldsymbol{e}_r$ 成角 $\bar{\theta}$（图2-4）。此时

$$\frac{z^2}{r^2}=(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{i}_3)^2=\cos^2\overline{\theta}$$

而表达式 Π 成为

$$\Pi=\frac{3}{2}\mu(C-A)\frac{\cos^2\bar{\theta}}{r^3} \tag{2.6.2}$$

下面将 Π 表为 Euler 角的函数。引入正交三面角，单位矢量为 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，以地心——人造卫星椭圆轨道的焦点为原点：$\boldsymbol{e}_1$ 指向轨道近地点，$\boldsymbol{e}_2$ 在轨道平面内与短轴平行，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$ 与轨道平面垂直。不计卫星轨道元素的扰动，这时 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 在空间保持不变方向。我们有

$$\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_1\cos\sigma+\boldsymbol{e}_2\sin\sigma \tag{2.6.3}$$

其中 σ 表示近地角，即矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 与近地方向的夹角。

与卫星固联的轴系 $oxyz$ 的方位（单位矢量 $\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$）用 Euler 角 ψ，θ，φ 给出(图 2-5)。这时有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{i}_3&=\sin\theta\sin\psi\\\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{i}_3&=-\sin\theta\cos\psi\\\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{i}_3&=\cos\theta\end{aligned}\right\} \tag{2.6.4}$$

进而按(2.6.3)，有

$$\begin{aligned}\cos\bar{\theta}=\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{i}_3&=\sin\theta(\sin\psi\cos\sigma-\cos\psi\sin\sigma)\\&=\sin\theta\sin(\psi-\sigma)\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

现在用 a 表示轨道的长半轴，由 Kepler 定律知

$$n=\frac{2\pi}{T}=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}}$$

其中 n 为频率或称平均运动，则

$$\Pi=\frac{3}{2}n^2\frac{a^3}{r^3}(C-A)\sin^2\theta\sin^2(\psi-\sigma) \tag{2.6.6}$$

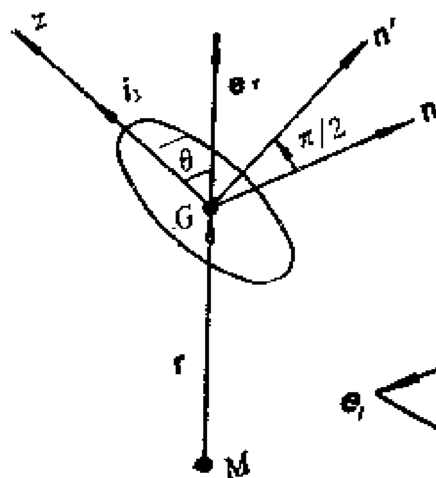


图 2-4

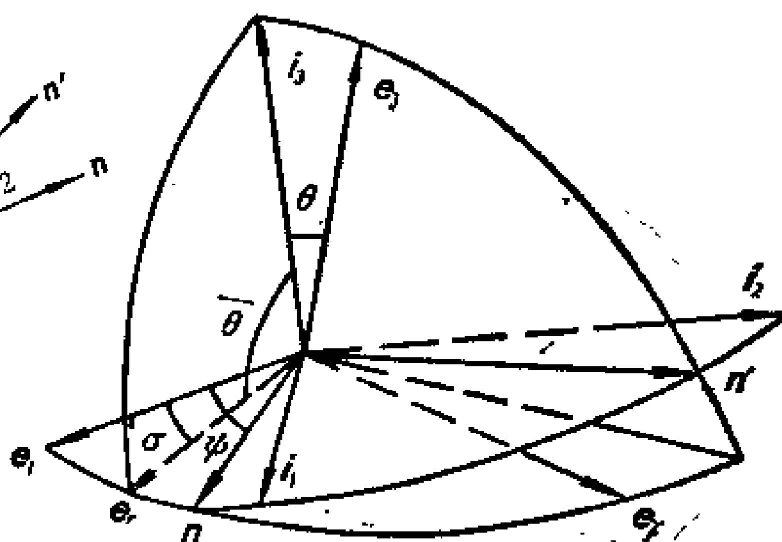


图 2-5

卫星绕质心转动的动能为

$$T=\frac{1}{2}A(\omega_1^2+\omega_2^2)+\frac{1}{2}C\omega_3^2$$

$$=\frac{1}{2}\{A(\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta)+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\} \tag{2.6.7}$$

动能还可写成形式

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\left\{A+(C-A)\frac{\omega_3^2}{\omega^2}\right\}=\frac{1}{2}\omega^2\left\{A+(C-A)\gamma^2\right\}$$

$$\gamma=\frac{\omega_3}{\omega}$$

对卫星有 $C-A<0$，我们得到

$$\frac{|H|}{T}=\frac{3n^2}{\omega^2}\frac{a^3}{r^3}\frac{1-\dfrac{C}{A}}{1-\left(1-\dfrac{C}{A}\right)\gamma^2}\sin^2\theta\sin^2(\psi-\sigma)$$

$$<\frac{3n^2}{\omega^2}\frac{a^3}{r^3}\left(\frac{A}{C}-1\right) \tag{2.6.8}$$

对于实际卫星，比值$(n/\omega)^2$是小量。这种情况允许应用扰动理论方法，并且一次近似(辅助问题)相应于在$\Pi=0$时的规则进动。对于地球，按(2.3.30)有

$$\frac{C-A}{C}=0.0033$$

在太阳吸引下

$$\frac{n}{\omega}\approx\frac{1}{366}$$

在月球吸引下，相应的为

$$\frac{n}{\omega}\approx\frac{1}{28}$$

比值Π/T是很小的。在人造卫星问题中，这个比值越小则应用扰动理论越有效。

2. Hamilton 函数 由表达式(2.6.6)和(2.6.7)得知，φ是循环坐标，因此相应的广义动量

$$p_\varphi=C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=\beta_\varphi \tag{2.6.9}$$

保持常值(不仅在辅助问题而且在基本问题中)。

组成动量表达式

$$p_\psi=A\dot{\psi}\sin\theta+\beta_\varphi\cos\theta,\quad p_\theta=A\dot{\theta} \tag{2.6.10}$$

我们求得

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{A},\qquad \dot{\psi}=\frac{p_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{A\sin^2\theta} \tag{2.6.11}$$

Hamilton 函数等于

$$H=\frac{1}{2}\left\{\frac{p_\theta^2}{A}+\frac{(p_\psi-\beta_\varphi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}\right\}+\frac{3}{2}n^2\frac{a^3}{r^3}$$

$$\times(C-A)\sin^2\theta\sin^2(\psi-\sigma) \tag{2.6.12}$$

在此表达式中已舍去常数项$\beta_\varphi^2/(2C)$。对辅助问题，Hamilton函数等于

$$H_0=\frac{1}{2}\left\{\frac{p_\theta^2}{A}+\frac{(p_\psi-\beta_\varphi\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta}\right\} \tag{2.6.13}$$

它对应规则进动运动。这里坐标 ψ 也是循环坐标

$$\dot{p}_\psi=-\frac{\partial H_0}{\partial\psi}=0,\ p_\psi=\beta_\psi \tag{2.6.14}$$

3. 动量矩是常矢量 物体的动量矩可写成形式

$$K=A(n\dot{\theta}+n'\dot{\psi}\sin\theta)+Ci_3(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)$$

其中 n, n', i_3 为半动三面角单位矢量，分别在节线、在赤道平面内与节线相垂直的线以及轴 oz 的方向，而

$$\omega_n=\dot{\theta},\ \omega_{n'}=\dot{\psi}\sin\theta,\omega_3=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta$$

为角速度在这些方向上的投影。由(2.6.9)，(2.6.11)和(2.6.14)，我们得到

$$K=np_\theta+n'\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{\sin\theta}+i_3\beta_\varphi \tag{2.6.15}$$

既然对质心的外力矩为零，那么矢量 K 的大小和方向就不变。这可由动量矩定理得到。不利用这个定理，仅利用正则方程(2.6.11)、(2.6.14)以及余下的方程

$$\dot{p}_\theta=-\frac{\partial H_0}{\partial\theta}=-\frac{1}{A\sin^3\theta}(\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta)(\beta_\varphi-\beta_\psi\cos\theta) \tag{2.6.16}$$

用直接对 K 的表达式(2.6.15)求导数的方法也可验证上述结论。为此，注意到单位矢量 n、n'，i_3 的半动三面角的角速度矢量等于

$$\begin{aligned}\omega_0&=n\dot{\theta}+n'\dot{\psi}\sin\theta+i_3\dot{\psi}\cos\theta\\&=\frac{1}{A}\left(np_\theta+n'\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{\sin\theta}+i_3\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta\right)\end{aligned} \tag{2.6.17}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{n}}&=\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{n}=\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{A\sin\theta}\left(\boldsymbol{n}'\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\boldsymbol{i}_3\right)\\
\dot{\boldsymbol{n}}'&=\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{i}_3\frac{p_\theta}{A}-\boldsymbol{n}\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{A\sin^2\theta}\cos\theta\\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_3}{\mathrm{d}t}&=\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{i}_3=-\boldsymbol{n}'\frac{p_\theta}{A}+\boldsymbol{n}\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{A\sin\theta}
\end{aligned}\right\}\tag{2.6.18}$$

我们求得

$$\dot{\boldsymbol{K}}=\dot{p}_\theta\boldsymbol{n}+p_\theta\dot{\boldsymbol{n}}+\left(\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\right)^{\cdot}\boldsymbol{n}'$$

$$+\frac{\beta_\psi-\beta_\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\boldsymbol{n}}'+\beta_\varphi\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}_3}{\mathrm{d}t}=0\tag{2.6.19}$$

这由导数$\dot{\theta}$，$\dot{p}_\theta$用其值(2.6.11)、(2.6.16)代入并代入单位矢量的导数表达式可得出。还要注意到，由(2.6.15)有

$$\boldsymbol{i}_3\cdot\boldsymbol{K}=\beta_\varphi,\quad \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{K}=\beta_\psi\tag{2.6.20}$$

并且第一个等式表明，物体轴 Gz 与不变方向矢量$\boldsymbol{K}$的夹角保持常值。因此，当$\boldsymbol{e}_3$沿$\boldsymbol{K}$方向，而在固定轴的这种选取下 Euler 角 ψ，θ，φ 分别用大写字母记作 Ψ，Θ，Φ，按(2.6.20)我们得到

$$\Theta=\Theta_0,\quad \beta_\Psi=K,\quad \beta_\Phi=K\cos\Theta_0\tag{2.6.21}$$

而由(2.6.11)和(2.6.9)得到

$$\dot{\Psi}=\frac{\beta_\Psi-\beta_\Phi\cos\Theta_0}{A\sin^2\Theta_0}=\frac{K}{A}$$

$$\dot{\Phi}=\frac{\beta_\Phi}{C}-\dot{\Psi}\cos\Theta_0=\frac{A-C}{AC}K\cos\Theta_0\tag{2.6.22}$$

前一表达式是绕不变方向矢量$\boldsymbol{K}$的规则进动运动中轴 Gz 的角速度，后一表达式是自旋角速度。

4. 用坐标变换确定 Euler 角 设$\boldsymbol{k}$为$\boldsymbol{K}$方向的单位矢量。物体轴$\boldsymbol{i}_3$在时间t内由原始位置$\boldsymbol{i}_3^0$发生的有限转动矢量$\boldsymbol{\theta}$为

$$\boldsymbol{n}'^0 \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\sin\psi_0\cos\theta_0, \quad \boldsymbol{n}'^0 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \cos\psi_0\cos\theta_0,$$

$$\boldsymbol{n}'^0 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \sin\theta_0$$

在基本变换后引向以下表达式

$$\cos\theta = \cos\Psi\left(\cos\theta_0 - \frac{\beta_\psi\beta_\varphi}{K^2}\right) - \frac{\beta_\theta\sin\theta_0}{K}\sin\Psi + \frac{\beta_\psi\beta_\varphi}{K^2} \qquad (2.6.27)$$

$$\sin\theta\sin\psi = \sin\theta_0\sin\psi_0\cos\Psi + \frac{\sin\Psi}{K}\left(\frac{\beta_\psi - \beta_\varphi\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\cos\psi_0 + \beta_\theta\cos\theta_0\sin\psi_0\right)$$
$$+ \frac{1-\cos\Psi}{K^2}\beta_\psi\left(\beta_\theta\cos\psi_0 + \frac{\beta_\varphi - \beta_\psi\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\sin\psi_0\right) \qquad (2.6.28)$$

$$\sin\theta\cos\psi = \sin\theta_0\cos\psi_0\cos\Psi + \frac{\sin\Psi}{K}\left(-\frac{\beta_\psi - \beta_\varphi\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\sin\psi_0\right.$$
$$\left. + \beta_\theta\cos\theta_0\cos\psi_0\right) + \frac{1-\cos\Psi}{K^2}\beta_\varphi\left(-\beta_\theta\sin\psi_0\right.$$
$$\left. + \frac{\beta_\varphi - \beta_\psi\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\cos\psi_0\right) \qquad (2.6.29)$$

公式(2.6.27)可用积分能量积分表达式得到；公式(2.6.28)和(2.6.29)可用积分角速度$\dot{\psi}$的表达式(2.6.11)得到。基于规则进动的简单公式以及坐标变换所得到的结论非常简单而且回答了事情的本质。还要注意到

$$\Psi = \frac{K}{A}t,\ K^2 = \beta_\theta^2 + \left(\frac{\beta_\psi - \beta_\varphi\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right)^2 + \beta_\varphi^2 \qquad (2.6.30)$$

与公式(2.6.27)、(2.6.28)和(2.6.29)联合下述关系

$$p_\psi = \beta_\psi,\quad p_\theta = \frac{K}{\sin\theta}\left[\left(\cos\theta_0 - \frac{\beta_\varphi\beta_\psi}{K^2}\right)\sin\Psi\right.$$
$$\left. + \frac{\beta_\theta}{K}\sin\theta_0\cos\Psi\right] \qquad (2.6.31)$$

后一关系由对表达式(2.6.27)求导数而得到。

5. 扰动运动的研究 上面我们得到了在规则进动运动中广义坐标和广义动量用时间以及变量初值表示的表达式，即辅助正则方程组的Cauchy积分。因此，对量β_θ，β_ψ，θ_0，ψ_0的扰动运动方程将是正则的。据(2.2.3)和(2.6.12)，这些方程是

$$\dot{\theta}_0=\frac{\partial \Pi}{\partial \beta_\theta}, \quad \dot{\psi}_0=\frac{\partial \Pi}{\partial \beta_\psi}$$

$$\dot{\beta}_\theta=-\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_0}, \quad \dot{\beta}_\psi=-\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} \tag{2.6.32}$$

我们将不取这些方程，而基于其它计算方法。我们从原始方程组中而不是辅助方程中研究动量矩的大小出发。据公式(2.6.12)和(2.6.15)，并且在后一式中β_ψ用p_ψ替代(此动量现在不再是常数)，我们有

$$K^2=2AH+\beta_\psi^2-3n^2\frac{a^3}{r^3}A(C-A)\sin^2\theta\sin^2(\psi-\sigma) \tag{2.6.33}$$

既然有能量积分 $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$，那么

$$2K\dot{K}=2\mathbf{K}\cdot\dot{\mathbf{K}}$$

$$=-3n^2A(C-A)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{a^3}{r^3}\sin^2\theta\sin^2(\psi-\sigma)\right\} \tag{2.6.34}$$

原始问题的正则方程写成形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{p}_\theta&=(\dot{p}_\theta)_0-\frac{\partial \Pi}{\partial \theta}=(\dot{p}_\theta)_0-3n^2\frac{a^3}{r^3}(C-A)\\&\quad\times\sin\theta\cos\theta\sin^2(\psi-\sigma)\\\dot{p}_\psi&=-\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}=-3n^2\frac{a^3}{r^3}(C-A)\sin^2\theta\\&\quad\times\sin(\psi-\sigma)\cos(\psi-\sigma)\end{aligned}\right\} \tag{2.6.35}$$

并且$(\dot{p}_\theta)_0$按(2.6.16)确定。方程(2.6.11)以及微分公式(2.6.18)在以p_ψ代替β_ψ后，保持不变形式。因此，计算矢量$\boldsymbol{K}$的导数，代替(2.6.19)的是

$$\dot{\boldsymbol{K}}=-3n^2\frac{a^3}{r^3}(C-A)\sin\theta\sin(\psi-\sigma)\{\boldsymbol{n}\cos\theta\sin(\psi-\sigma)+\boldsymbol{n}'\cos(\psi-\sigma)\} \tag{2.6.36}$$

因为其余导数按(2.6.19)结果恒等于零。我们得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_1&=3n^2\frac{a^3}{r^3}(C-A)\cos\theta\sin\theta\sin(\psi-\sigma)\sin\sigma\\ \dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_2&=-3n^2\frac{a^3}{r^3}(C-A)\cos\theta\sin\theta\sin(\psi-\sigma)\cos\sigma\\ \dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_3&=-3n^2\frac{a^3}{r^3}(C-A)\sin^2\theta\sin(\psi-\sigma)\cos(\psi-\sigma)\end{aligned}\right\} \tag{2.6.37}$$

下面限于研究规则进动运动的长期扰动，即随时间单调增大的项。不考虑周期扰动。注意到方程(2.6.37)右边包括两组周期性——对于带卫星沿轨道运行周期的变量σ，以及对于带有卫星轴进动周期的变量Ψ；据条件后者小于前者。既不考虑长周期的扰动，也不考虑短周期的扰动。上述方程右边必须对两个变量σ和Ψ取平均。我们导出如下关系

$$\dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{4\pi^2}3n^2(C-A)\int_0^{2\pi}\frac{a^3}{r^3}\sin\sigma\,\mathrm{d}\sigma\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\times\sin(\psi-\sigma)\,\mathrm{d}\Psi \tag{2.6.38}$$

为得到扰动运动的更精确的图象必须考虑长周期振动，限于对变量Ψ取平均，并在取平均时忽略依赖于σ的量的变化，这些量在变量Ψ的周期内没有多大的改变。在此平均下，矢量$\boldsymbol{K}$的大小保持常值，这可由关系(2.6.34)得到。右边部分对变量Ψ取平均，我们得到

$$2K\dot{K}=-3n^2A(C-A)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\Psi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{a^3}{r^3}\sin^2\theta\sin^2(\psi-\sigma)$$

$$=-\frac{3n^2}{2\pi}A(C-A)\frac{K}{A}\sin^2\theta\sin^2(\psi-\sigma)\frac{a^3}{r^3}\Big|_{\Psi=0}^{\Psi=2\pi}=0 \tag{2.6.39}$$

因为 $\sin\Psi\sin\theta$ 和 $\cos\Psi\sin\theta$ 按(2.6.28)和(2.6.29)是 Ψ 的周期函数。

转向计算积分(2.6.38)。在对变量 σ 取平均时，需用量

$$\frac{a^3}{r^3}=\frac{1}{(1-e^2)^3}(1+e\cos\sigma)^3 \tag{2.6.40}$$

来代替 a^3/r^3。积分时没有多大困难，但公式列写很是复杂。因此以下计算限于圆轨道($e=0$)情形。在卫星问题中，这不会导致错误，因为实际卫星的偏心率很小。在对 σ 取平均后，我们得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_1&=-\frac{3n^2}{4\pi}(C-A)\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\cos\psi\,\mathrm{d}\Psi\\ \dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_2&=-\frac{3n^2}{4\pi}(C-A)\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\sin\psi\,\mathrm{d}\Psi\end{aligned}\right\} \tag{2.6.41}$$

以及

$$\dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_3=-\frac{3n^2}{8\pi^2}(C-A)\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\Psi\int_0^{2\pi}\sin2(\psi-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=0 \tag{2.6.42}$$

矢量 $\boldsymbol{K}$ 在圆轨道平面的法向 $\boldsymbol{e}_3$ 上的投影不具有长期扰动。在关系(2.6.41)中积分号下表达式需用(2.6.27)—(2.6.29)替代；在计算积分时需将时间的慢变量 β_ψ，β_θ，θ_0，ψ_0 当作常数。我们有

$$\cos\theta\sin\theta\cos\psi=\cos^2\Psi\left(\cos\theta_0-\frac{\beta_\psi\beta_\varphi}{K^2}\right)$$

$$\times\Big\{\sin\theta_0\cos\psi_0+\frac{\beta_\varphi\beta_\theta}{K^2}\sin\psi_0$$

$$
-\frac{\beta_{\varphi}(\beta_{\varphi}-\beta_{\psi}\cos\theta_{0})}{K^{2}\sin^{2}\theta_{0}}\cos\psi_{0}\Big\}+\frac{\beta_{\theta}\sin\theta_{0}}{K^{2}}\sin^{2}\Psi
$$

$$
\times\left(\frac{\beta_{\varphi}-\beta_{\psi}\cos\theta_{0}}{\sin\theta_{0}}\sin\psi_{0}-\beta_{\theta}\cos\theta_{0}\cos\psi_{0}\right)
$$

$$
+\frac{\beta_{\varphi}^{2}\beta_{\psi}}{K^{4}}\left(-\beta_{\theta}\sin\psi_{0}+\frac{\beta_{\varphi}-\beta_{\psi}\cos\theta_{0}}{\sin\theta_{0}}\cos\psi_{0}\right)+\cdots
$$

而对 Ψ 积分后变为零的项未写出，积分并化简，得到

$$
\dot{K}\cdot\boldsymbol{e}_{1}=\frac{3n^{2}}{4}(C-A)\left(1-\frac{3\beta_{\varphi}^{2}}{K^{2}}\right)\frac{\beta_{\psi}}{K}
$$

$$
\times\left(\frac{\beta_{\varphi}-\beta_{\psi}\cos\theta_{0}}{K\sin\theta_{0}}\cos\psi_{0}-\frac{\beta_{\theta}}{K}\sin\psi_{0}\right)\qquad(2.6.43)
$$

类似地有

$$
\dot{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{e}_{2}=\frac{3n^{2}}{4}(C-A)\left(1-\frac{3\beta_{\varphi}^{2}}{K^{2}}\right)\frac{\beta_{\psi}}{K}
$$

$$
\times\left(\frac{\beta_{\varphi}-\beta_{\psi}\cos\theta_{0}}{K\sin\theta_{0}}\sin\psi_{0}+\frac{\beta_{\theta}}{K}\cos\psi_{0}\right)
$$

这些关系容易写成更清楚的形式。按(2.6.25)，求得

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_{1}&=\frac{\beta_{\theta}}{K}\cos\psi_{0}+\frac{\beta_{\varphi}-\beta_{\psi}\cos\theta_{0}}{K\sin\theta_{0}}\sin\psi_{0}\\
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_{2}&=\frac{\beta_{\theta}}{K}\sin\psi_{0}-\frac{\beta_{\varphi}-\beta_{\psi}\cos\theta_{0}}{K\sin\theta_{0}}\cos\psi_{0}
\end{aligned}\right\}\qquad(2.6.44)
$$

因此，考虑到(2.6.20)并用Θ_0，χ_0表示矢量$\boldsymbol{K}$与卫星轴和与轨道平面相垂直的轴之间的常角度(在规则进动下)，用r_0表示由(2.6.9)确定的物体常自旋角速度，得到

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{K}\cdot e_1 &= -\frac{3n^2}{4}\frac{C-A}{Cr_0}\cos\Theta_0 \\
&\quad\times(1-3\cos^2\Theta_0)\cos\chi_0 K\cdot e_2 \\
\dot{K}\cdot e_2 &= \frac{3n^2}{4}\frac{C-A}{Cr_0}\cos\Theta_0 \\
&\quad\times(1-3\cos^2\Theta_0)\cos\chi_0 K\cdot e_1
\end{aligned}\right\}\qquad(2.6.45)
$$

这些关系表明，动量矩矢量 $\boldsymbol{K}$ 以与轨道平面法向 $\boldsymbol{e}_3$ 相平行的角速度

$$
\boldsymbol{\Omega}=\frac{3n^2}{4}\frac{C-A}{Cr_0}\cos\Theta_0(1-3\cos^2\Theta_0)\cos\chi_0\boldsymbol{e}_3 \tag{2.6.46}
$$

而转动。因此，卫星完成规则进动，矢量 $\boldsymbol{K}$ 以角速度$\boldsymbol{\Omega}$进动，而 $\boldsymbol{K}$ 保持大小不变。规则运动的扰动效应可用卫星惯性椭球的非球性($A\neq C$)来解释。

§2.7 扰动Kepler运动方程

1. Kepler 运动 质点在Newton中心引力场中的运动轨迹是一平面曲线，点在平面上的位置可用极坐标r，φ来确定。对单位质量的质点 Hamilton 函数为

$$
H=\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)-\frac{fM}{r} \tag{2.7.1}
$$

Hamilton-Jacobi 方程

$$
H=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right\}-\frac{fM}{r}=h
$$

的完全积分有形式

$$
W=\beta_\varphi\varphi+R(r) \tag{2.7.2}
$$

其中 $R(r)$应由微分方程

$$p_r = p_r^0 = \dot{r}_0 < 0$$

这时在某时间间隔$(0,\ t_0)$内矢径r将由初始值r_0减小到r_1，而(2.7.5)第二式应取下面符号，给出

$$-\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = t \qquad 及 \qquad \int_{r_1}^{r_0} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = t_0 \qquad (2.7.11)$$

并且t_0为通过近日点时刻，因为被积函数的分母虽趋于零但与$\sqrt{r-r_1}$成比例。

时间t从t_0计起，在上述公式中r_1取为积分下限而积分号前取正号，r随r_1值增大，不到达远日点值r_2

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = t - t_0, \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = t_1 - t_0$$

若从时刻t_1开始，我们又有

$$-\int_{r_2}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = t - t_1, \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} = t_2 - t_1$$

其中t_2为通过近日点的新时刻。下面将会看到，回到近日点和远日点相应于通过平面的同一点(φ转过2π)。这意味着，轨道是封闭的，而运动是周期的。时间间隔

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \frac{1}{2} T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{f(r)}} \qquad (2.7.12)$$

等于在轨道上运动的半周期。

形如(2.7.5)的积分计算可根据以下关系引入新变量w：

$$r = r_1 \cos^2 \frac{w}{2} + r_2 \sin^2 \frac{w}{2} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) - \frac{1}{2}(r_2 - r_1)\cos w \qquad (2.7.13)$$

不难验证，不等式(2.7.10)对实的 w 都满足。因此，当事先知道所研究的量在两极限值(在我们的情形是 r_1，r_2)之间时，关系(2.7.13)对所有情形都可有效地应用。在 Kepler 问题中，变量 w 称为偏心近点角。在近日点和远日点，它取值 0 和 π。

如果引进表记

$$r_1+r_2=2a,\quad r_2-r_1=2ae \tag{2.7.14}$$

并且显然 $0<e<1$，那么公式(2.7.13)可简化。此时我们得到

$$r=a(1-e\cos w) \tag{2.7.15}$$

等式(2.7.9)和(2.7.14)可用来简化表达式(2.7.8)，我们求得

$$r^2f(r)=\mu ae^2\sin^2 w$$

此后关系(2.7.5)引向形式

$$\int_{r_1}^{r}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2f(r)}}=\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\int_0^w(1-e\cos w)\mathrm{d}w=t-t_0 \tag{2.7.16}$$

$$\varphi=\sqrt{\mu a(1-e^2)}\int_{r_1}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2f(r)}}$$

$$=\sqrt{1-e^2}\int_0^w\frac{\mathrm{d}w}{1-e\cos w} \tag{2.7.17}$$

这里已考虑到

$$\beta_\varphi=\sqrt{\mu a(1-e^2)} \tag{2.7.18}$$

而 α_φ 取为零，相应于 φ 角(称为真近点角)由吸引中心到近日点的方向计起。由(2.7.16)和(2.7.12)，我们求得

$$T=\frac{2\pi a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}},\qquad n=\frac{2\pi}{T}=\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}} \tag{2.7.19}$$

对回归周期 T 和频率 n(也叫平均运动)的这些公式用以表达 Kepler 第三定律。(2.7.16)引向 Kepler 方程

$$w-e\sin w=n(t-t_0)=\zeta \tag{2.7.20}$$

它用来确定偏心近点角为时间的函数。量 ζ 称为平均近点角。

对表达式(2.7.17)进行积分，我们求得联系真近点角 φ 与偏心近点角 w 的公式

$$\varphi=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{w}{2}\right),\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{w}{2} \tag{2.7.21}$$

由此得到

$$\cos w=\frac{e+\cos\varphi}{1+e\cos\varphi},\quad \sin w=\sqrt{1-e^2}\frac{\sin\varphi}{1+e\cos\varphi} \tag{2.7.22}$$

反解出

$$\cos\varphi=\frac{\cos w-e}{1-e\cos w},\quad \sin\varphi=\sqrt{1-e^2}\frac{\sin w}{1-e\cos w} \tag{2.7.23}$$

现在可以看出，轨道是以吸引中心为焦点的椭圆，并且上面引出的常数 a 和 e 是此椭圆的长半轴和偏心率。实际上，(2.7.15)中的 $\cos w$ 以其值(2.7.22)替代，我们得到以焦点 F 为原点的极坐标方程(图2-6)

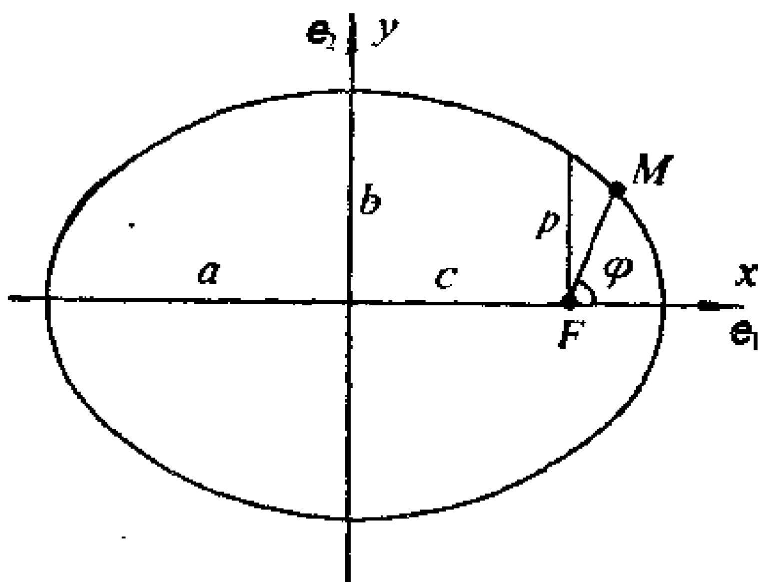


图 2-6

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}=\frac{p}{1+e\cos\varphi} \tag{2.7.24}$$

其中 p 为椭圆参数——焦点的纵坐标。

用公式(2.7.24)、(2.7.20)、(2.7.21)表示的解中出现三个常数a，e，t_0。点在空间中运动方程的通解应包含六个常数。作为其余常数我们应用三个 Euler 角，用以确定轨道平面以及轨道平面上的轴在以引力中心为原点的不变方向坐标系 $o\xi\eta\zeta$ 中(星系中)的位置。

轴系 $oxyz$ 的方向用单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 给出，$\boldsymbol{e}_1$ 由引力中心指向近日点，$\boldsymbol{e}_2$ 在轨道平面上与 $\boldsymbol{e}_1$ 垂直并在 φ 角增加方向，$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$ 与此平面垂直。Euler 角记作 Ω，i，ω(图2-7)。角 Ω 在平面 $o\xi\eta$ 上确定此平面与轨道平面交线的方向，此交线即节线：点 N 称为进入节点，在此点上它与由远日点向近日点运动的点相遇；因此角 Ω 是进入节点的经度。角 i 确定轨道平面对平面 $o\xi\eta$ 的倾角，而角 ω 是节线(指向进入节点)和轴 ox(指向近日点)之间的夹角。

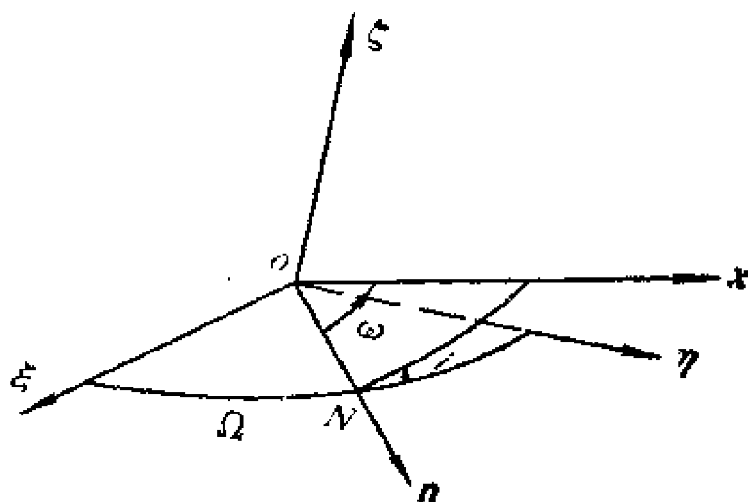


图2-7

动点矢径表达式写成

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{e}_1 r\cos\varphi+\boldsymbol{e}_2 r\sin\varphi\\
&=a\{\boldsymbol{e}_1(\cos w-e)+\boldsymbol{e}_2\sqrt{1-e^2}\sin w\}
\end{aligned}
\qquad (2.7.25)
$$

将其投影到轴系 $o\xi\eta\zeta$ 上，得到动点坐标 ξ，η，ζ 的表达式，这

类例子。人造地球卫星的扰动运动由空气阻力以及地球非球性引起的引力附加力而发生。

现在导出扰动 Kepler 运动方程。我们从未扰动运动中行星矢径 $\boldsymbol{r}$ 和速度矢量的表达式(2.7.25)和(2.7.28)出发。在这些公式中借助(2.7.22)由偏心近点角 w 向真近点角 φ 过渡，我们得到表达式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi},\quad \boldsymbol{v}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\times\{\boldsymbol{e}_r e\sin\varphi+\boldsymbol{e}_\varphi(1+e\cos\varphi)\} \qquad (2.7.33)$$

前一式为众所周知；$\boldsymbol{e}_\varphi$——垂直于矢径 $\boldsymbol{r}$、在未扰动轨道平面(密切轨道的接触平面)上在 φ 的增加方向上的单位矢量。矢量积 $\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\varphi$ 用 $\boldsymbol{e}_3$ 表记。三面角 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{e}_3$ 由三面角 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 绕 $\boldsymbol{e}_3$ 转一角 φ 而得到($\boldsymbol{e}_1$ 由引力中心向未扰动轨道近日点的方向)；三面角 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的方位由 Euler 角 Ω，i，ω 给出。

应用常数变易法，对扰动运动中的矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 保持与未扰动运动中一样的表达式(2.7.33)，但椭圆元素(2.7.26)不是常数而是时间的未知函数。这些未知函数这样确定：$\boldsymbol{r}$ 对时间求导引向所指表达式 $\boldsymbol{v}$，而 $\boldsymbol{v}$ 对时间求导得加速度矢量，加速度矢量由引力 $\boldsymbol{F}_0$ 与干扰力 $\boldsymbol{F}$ 的几何和确定。

设 $\boldsymbol{\omega}$ 为三面角 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的角速度矢量，此时三面角 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{e}_3$ 的角速度为 $\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{e}_3\dot{\varphi}$。由单位矢量的求导公式，我们得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_r&=(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{e}_3\dot{\varphi})\times\boldsymbol{e}_r=(\omega_3+\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi-\omega_\varphi\boldsymbol{e}_3\\ \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi&=(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{e}_3\dot{\varphi})\times\boldsymbol{e}_\varphi=\omega_r\boldsymbol{e}_3-(\omega_3+\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_r\\ \dot{\boldsymbol{e}}_3&=(\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{e}_3\dot{\varphi})\times\boldsymbol{e}_3=\omega_\varphi\boldsymbol{e}_r-\omega_r\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (2.7.34)$$

其中 ω_r，ω_φ，ω_3 可用 Euler 角的导数确定：

$$
\left.
\begin{aligned}
\omega_r &= \omega_1\cos\varphi + \omega_2\sin\varphi = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cos u + \dot{\Omega}\sin i\sin u \\
\omega_\varphi &= -\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi = -\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\sin u \\
&\quad + \dot{\Omega}\sin i\cos u \\
\omega_3 &= \dot{\omega} + \dot{\Omega}\cos i
\end{aligned}
\right\} \tag{2.7.35}
$$

并且

$$
u = \omega + \varphi \tag{2.7.36}
$$

为矢径 $\boldsymbol{r}$ 与进入节点方向所成的角度。

在未扰动运动中三面角 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{e}_3$ 具有角速度 $\boldsymbol{e}_3\dot{\varphi}^0$，当然不同于扰动运动中此三面角角速度矢量的分量 $\boldsymbol{e}_3\dot{\varphi}$。公式(2.7.34)在未扰动运动中有形式

$$
\dot{\boldsymbol{e}}_r^0 = \dot{\varphi}^0\boldsymbol{e}_\varphi, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi^0 = -\dot{\varphi}^0\boldsymbol{e}_r, \quad \dot{\boldsymbol{e}}_3^0 = 0 \tag{2.7.37}
$$

对矢量 $\boldsymbol{r}$ 的表达式(2.7.33)求导，得到

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\varphi}^0\boldsymbol{e}_\varphi\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi} + \boldsymbol{e}_r\frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\varphi)^2}\dot{\varphi}^0 e\sin\varphi \\
&\quad + \boldsymbol{e}_r\left[(\dot{\varphi}-\dot{\varphi}^0)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \dot{e}\frac{\partial}{\partial e} + \dot{a}\frac{\partial}{\partial a}\right]\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi} \\
&\quad + \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}\left\{(\omega_3 + \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^0)\boldsymbol{e}_\varphi - \omega_\varphi\boldsymbol{e}_3\right\}
\end{aligned} \tag{2.7.38}
$$

并且前两项是对未扰动运动计算的导数 $\dot{\boldsymbol{r}}^0$。当然这给出由公式(2.7.33)确定的矢量 $\boldsymbol{v}$。这不难验证，因为由(2.7.7)和(2.7.18)或直接由面积定理，有

$$
\dot{\varphi}^0 = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{a(1-e^2)^{3/2}} \tag{2.7.39}
$$

公式(2.7.38)中的附加项，按前面指出的，应等于零。于是导出扰动运动的第一组方程

$$=\left(-\omega_3\frac{\partial}{\partial\varphi}+\dot{e}\frac{\partial}{\partial e}+\dot{a}\frac{\partial}{\partial a}\right)v$$

$$+\omega_{r3}e\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos\varphi) \qquad (2.7.46)$$

而扰动运动的第二组方程是

$$\omega_r=\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\cos u+\dot{\Omega}\sin i\sin u=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\varphi}F_3 \qquad (2.7.47)$$

$$\frac{\dot{e}(\cos\varphi+e)}{1-e^2}-\frac{\dot{a}}{2a}(1+e\cos\varphi)+\omega_3 e\sin\varphi$$

$$=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}F_\varphi \qquad (2.7.48)$$

$$\frac{\dot{e}}{1-e^2}\sin\varphi-\frac{\dot{a}}{2a}e\sin\varphi-\omega_3 e\cos\varphi$$

$$=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}F_r \qquad (2.7.49)$$

由方程(2.7.40)和(2.7.47)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\varphi}F_3\cos u$$

$$\dot{\Omega}\sin i=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\varphi}F_3\sin u \qquad (2.7.50)$$

而由(2.7.42)、(2.7.48)和(2.7.49)得到

$$\dot{e}=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\left(F_r\sin\varphi+\frac{e+2\cos\varphi+e\cos^2\varphi}{1+e\cos\varphi}F_\varphi\right)$$

$$(2.7.51)$$

$$\frac{\dot{a}}{2a}=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}[F_r e\sin\varphi$$

$$+(1+e\cos\varphi)F_\varphi] \qquad (2.7.52)$$

$$\omega_3=\sqrt{\frac{a}{\mu}}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(-F_r\cos\varphi\right.$$

$$\left.+\frac{2+e\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}F_\varphi\sin\varphi\right) \tag{2.7.53}$$

于是我们得到扰动运动的五个方程(2.7.50)—(2.7.53)。扰动运动的第六个方程，即经历时间 t_0 用近日点表示的方程，将在下节得到。它是由关系(2.7.41)导出的。如果考虑到由(2.7.50)第二个方程给出的$\dot{\Omega}$以及公式(2.7.35)、(2.7.36)和(2.7.39)，关系(2.7.41)可变换为形式

$$\dot{u}=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{a(1-e^2)^{3/2}}\Gamma$$

$$\Gamma=1-\frac{F_3a^2\sin u\,\mathrm{ctg}\,i(1-e^2)^2}{\mu(1+e\cos\varphi)^3} \tag{2.7.54}$$

利用这一表达式，方程(2.7.50)—(2.7.53)可过渡到独立变量u。我们得到扰动运动方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}=G\frac{F_3\cos u}{1+e\cos\varphi},\quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}u}=G\frac{F_3\sin u}{(1+e\cos\varphi)\sin i} \tag{2.7.55}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}u}=G\left(F_r\sin\varphi+\frac{e+2\cos\varphi+e\cos^2\varphi}{1+e\cos\varphi}F_\varphi\right) \tag{2.7.56}$$

$$\frac{1}{2a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}=\frac{G}{1-e^2}[F_re\sin\varphi+(1+e\cos\varphi)F_\varphi] \tag{2.7.57}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}u}=\frac{G}{e}\left(-F_r\cos\varphi+\frac{2+e\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}F_\varphi\sin\varphi\right.$$

$$\left.-eF_3\frac{\sin u\,\mathrm{ctg}\,i}{1+e\cos\varphi}\right) \tag{2.7.58}$$

这里用简单记号

$$G=\frac{1}{\Gamma}\frac{a^2}{\mu}\frac{(1-e^2)^2}{(1+e\cos\varphi)^2} \tag{2.7.59}$$

而方程(2.7.58)由(2.7.53)、(2.7.55)及关系(2.7.35)的最后一个得到。上面导出的方程未涉及几何方法，而是通过不太复杂计算的常数变易法导出的。

在方程(2.7.54)—(2.7.59)中角 φ 按(2.7.36)确定作为角 u 与 ω 的差。在六个方程(2.7.54)—(2.7.59)中，如果 F_r，F_φ，F_3不显含时间，那么五个方程(2.7.55)—(2.7.59)可由方程(2.7.54)分出来。方程(2.7.54)给出时间用变量 u 表示的表达式，之后方程(2.7.55)—(2.7.59)可积分出来。

§2.8 人造地球卫星质心的扰动运动

1. 卫星质心的扰动方程 我们限于研究由地球引力场的非中心性引起的、人造地球卫星质心的 Kepler 运动的扰动。

由地球压缩引起的附加引力的势能，按(2.3.6)在$\Theta_3=C$，$\Theta_1=\Theta_2=A$时，由下式确定

$$\Pi=-\frac{\mu}{2}\frac{C-A}{r^3}(\xi^2+\eta^2-2\zeta^2)$$

$$=-\frac{3}{2}\mu\frac{C-A}{r^3}\left(\frac{1}{3}-\frac{\zeta^2}{r^2}\right)$$

坐标系 $o\xi\eta\zeta$ 的原点取在地心，轴 $o\zeta$ 垂直于赤道平面。按公式(2.3.29)替代 $C-A$，我们得到

$$\Pi=-\mu R_0^2\varepsilon\left(\frac{1}{3r^3}-\frac{\zeta^2}{r^5}\right) \tag{2.8.1}$$

其中 $\varepsilon=0.00164$ 为地球形状理论常数。这个量很小就决定了轨道元素的慢变性。在表达式(2.8.1)中与 ε^2 成比例的项没有考虑，并且在后面的研究中也不考虑。

我们有

$$\overline{F} = -grad\,\Pi = -\varepsilon\frac{\mu R_0^2}{r^4}\left(1-5\frac{\zeta^2}{r^2}\right)\boldsymbol{e}_r$$

$$-2\varepsilon\frac{\mu R_0^2}{r^4}\frac{\zeta}{r}\boldsymbol{k} \tag{2.8.2}$$

其中$\boldsymbol{k}$为轴$o\zeta$的单位矢量。注意到

$$\frac{\zeta}{r} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_r = \sin i\sin u,\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = \sin i\cos u$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{e}_3 = \cos i \tag{2.8.3}$$

我们求得

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -\varepsilon\frac{\mu R_0^2}{r^4}(1-3\sin^2 i\sin^2 u)\\ F_\varphi &= -\varepsilon\frac{\mu R_0^2}{r^4}\sin^2 i\sin 2u\\ F_3 &= -\varepsilon\frac{\mu R_0^2}{r^4}\sin 2i\sin u \end{aligned}\right\} \tag{2.8.4}$$

量Γ等于

$$\Gamma = 1+2\varepsilon\frac{R_0^2\cos^2 i}{a^2(1-e^2)^2}(1+e\cos\varphi)\sin^2 u \tag{2.8.5}$$

在组成方程(2.7.55)—(2.7.58)时，可取$\Gamma=1$。将力的表达式(2.8.4)代入方程(2.7.55)—(2.7.58)，我们引向方程组

$$\frac{di}{du} = -\frac{\varepsilon_1}{2}\sin 2i(1+e\cos\varphi)\sin 2u \tag{2.8.6}$$

$$\frac{d\Omega}{du} = -\varepsilon_1\cos i(1+e\cos\varphi)(1-\cos 2u) \tag{2.8.7}$$

$$\frac{de}{du} = -\varepsilon_1\{(1-3\sin^2 u\sin^2 i)\sin\varphi(1+e\cos\varphi)^2$$

$$+\sin^2 i\sin 2u(e+2\cos\varphi+e\cos^2\varphi)(1+e\cos\varphi)\} \tag{2.8.8}$$

$$\frac{1}{2a}\frac{da}{du} = -\frac{\varepsilon_1}{1-e^2}\{(1-3\sin^2 u\sin^2 i)e\sin\varphi(1+e\cos\varphi)^2$$

$$+\sin^2 i\sin 2u(1+e\cos\varphi)^3\} \tag{2.8.9}$$

$$\frac{d\omega}{du}=\frac{\varepsilon_1}{e}\{(1-3\sin^2 u\sin^2 i)(1+e\cos\varphi)^2\cos\varphi$$
$$-\sin^2 i\sin 2u\sin\varphi(2+e\cos\varphi)(1+e\cos\varphi)$$
$$+2e\sin^2 u\cos^2 i(1+e\cos\varphi)\} \tag{2.8.10}$$

这里用记号

$$\varepsilon_1=\varepsilon\frac{R_0^2}{a^2(1-e^2)^2} \tag{2.8.11}$$

2. 长期扰动 仅限于研究长期扰动，我们将方程(2.8.6)—(2.8.10)的右端用卫星一周内，即变量 u 的变化区间$(0, 2\pi)$内的平均值来替代。在取平均值时，椭圆轨道元素 a, e, i, ω 当作常数，角 φ 要用其值 $u-\omega$ 替代。例如，研究表达式(2.8.8)中方括号的平均过程，将其写成

$$\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i+\frac{3}{2}\cos 2u\sin^2 i\right)\left\{\sin\varphi+e\sin 2\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}e^2(\sin\varphi+\sin 3\varphi)\right\}+\sin^2 i\sin 2u\left\{\frac{5}{2}e+\left(\frac{7}{4}e^2+2\right)\cos\varphi\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}e\cos 2\varphi+\frac{e^2}{4}\cos 3\varphi\right\}$$
$$=\frac{3}{2}e\sin^2 i(\cos 2u\sin 2\varphi+\sin 2u\cos 2\varphi)+\cdots$$
$$=\frac{3}{2}e\sin^2 i\sin(4u-2\omega)+\cdots$$

其中未写出之项的平均值显然为零。类似地计算给出

$$\frac{da}{du}=0, \quad \frac{de}{du}=0, \quad \frac{di}{du}=0 \tag{2.8.12}$$

因此，椭圆元素 a, e, i 没有长期项(与 u 成比例的)，它们是 u 的周期函数。导数平均值异于零的是

$$\frac{d\Omega}{d\mu}=-\varepsilon_1\cos i, \qquad \frac{d\omega}{du}=-\frac{1}{2}\varepsilon_1(1-5\cos^2 i) \tag{2.8.13}$$

升节和近日点方向与节线所成角在卫星转 N 圈内改变量值

$$\Omega_N=-2\pi\varepsilon_1 N\cos i,\quad \omega_N=-\pi N\varepsilon_1(1-5\cos^2 i)\qquad(2.8.14)$$

3. 近日点经历时间的变化 第六个椭圆元素——近日点经历时间变化的计算更为复杂。首先我们注意到给出的真近点角 φ 用偏心近点角 w 表示的关系(2.7.21)是未扰动运动方程的积分，其中包括三个常数 e，a，t_0，而后两个参数出现于 Kepler 方程(2.7.20) 中。因此，根据常数变易法的基本思想，积分公式(2.7.21)在扰动运动中在非常数的 e，a，t_0 下仍保持着。

将方程(2.7.21)和(2.7.20)对时间求导数，我们得到

$$\dot{\varphi}=\sqrt{1-e^2}\,\frac{\dot{w}}{1-e\cos w}+\frac{\dot{e}\sin\varphi}{1-e^2}$$

$$\dot{w}=\frac{\dot{\xi}+\dot{e}\sin w}{1-e\cos w}\qquad(2.8.15)$$

其中 $\xi=n(t-t_0)$。从中消去 $\dot{w}$，而 $\cos w$ 和 $\sin w$ 按(2.7.23)替代，我们得到

$$\dot{\varphi}=\frac{\dot{\xi}\,(1+e\cos\varphi)^2}{(1-e^2)^{3/2}}+\frac{\dot{e}\sin\varphi}{1-e^2}(2+e\cos\varphi)\qquad(2.8.16)$$

但由(2.7.54)有

$$\dot{\varphi}=\dot{u}-\dot{w}=\dot{u}\left(1-\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)=\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{a(1-e^2)^{3/2}}\Gamma\left(1-\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}u}\right)$$

$$\approx\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{a(1-e^2)^{3/2}}\left[1+(\Gamma-1)-\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}u}\right]\qquad(2.8.17)$$

将其代入(2.8.16)，给出

$$\dot{\xi}-n=n\left[\Gamma-1-\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}u}-\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}u}\,\frac{\sin\varphi(2+e\cos\varphi)}{1-e^2}\right]\qquad(2.8.18)$$

此方程右边借助(2.8.5)、(2.8.10)和(2.8.8)可引向形式

$$n\varepsilon_1\frac{(1+e\cos\varphi)^3}{e(1-e^2)}[(1-3\sin^2u\sin^2i)(2e-\cos\varphi-e\cos^2\varphi)$$

$$+\sin^2i\sin 2u\sin\varphi(2+e\cos\varphi)] \qquad (2.8.19)$$

而左边部分表达式，利用关系(2.7.54)以及 kepler 方程，可变换为

$$\dot{\xi}-n=\dot{n}(t-t_0)-n\frac{dt_0}{dt}$$

$$=\left\{\frac{1}{n}(w-e\sin w)\frac{dn}{du}-n\frac{dt_0}{du}\right\}n\frac{(1+e\cos\varphi)^2}{(1-e^2)^{3/2}}$$

$$(2.8.20)$$

还要注意到

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{du}=-\frac{3}{2a}\frac{da}{du} \qquad (2.8.21)$$

而 w 和 $\sin w$ 用其值(2.7.21)和(2.7.22)替代，我们导出下述微分方程

$$n\frac{dt_0}{du}=f_1(\varphi)2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)+f_2(\varphi) \qquad (2.8.22)$$

其中

$$f_1(\varphi)=\frac{3\varepsilon_1}{1-e^2}(1+e\cos\varphi)^2\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2i\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3}{2}\cos 2u\sin^2i\right)e\sin\varphi+(1+e\cos\varphi)\sin^2i\sin 2u\right\} \qquad (2.8.23)$$

$$f_2(\varphi)=-\frac{\varepsilon_1}{e\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos\varphi)$$

$$\times\left[\left(1-\frac{3}{2}\sin^2i+\frac{3}{2}\cos 2u\sin^2i\right)\left\{e(2+e^2)-\cos\varphi(1-e^2)\right.\right.$$

$$\left.-e(1+2e^2)\cos^2\varphi\right]+\sin^2i\sin 2u\sin\varphi\Big[2$$

$$2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{1-e^2}\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\psi}{1+e\cos\psi}$$

并利用已知的积分变换，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(a_k\sin k\varphi+b_k\cos k\varphi)\cdot 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\sqrt{1-e^2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\psi}{1+e\cos\psi}\int_{\psi}^{2\pi}(a_k\sin k\varphi+b_k\cos k\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a_k}{k}\left[\sqrt{1-e^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos k\psi}{1+e\cos\psi}\mathrm{d}\psi-1\right]$$

$$-\frac{b_k}{k}\sqrt{1-e^2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin k\psi}{1+e\cos\psi}d\psi$$

积分

$$I_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\psi}}{1+e\cos\psi}\mathrm{d}\psi$$

借助替换 $e^{i\psi}=\sigma$ 可变换为

$$I_k=\frac{2}{2\pi i}\oint\frac{\sigma^k\mathrm{d}\sigma}{e\sigma^2+2\sigma+e}=\frac{2}{2\pi i}\frac{1}{e}\oint\frac{\sigma_k\mathrm{d}\sigma}{(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)}$$

其中积分沿单位圆进行：用 σ_1 和 σ_2 表示分母三项式的根

$$\sigma_1=-\frac{1}{e}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right),\ \sigma_2=-\frac{1}{e}\left(1+\sqrt{1-e^2}\right)$$

并且 $|\sigma_1|<1$，而 $|\sigma_2|>1$。按 Cauchy 定理，我们得到

$$I_k=\frac{2\sigma_1^k}{e(\sigma_1-\sigma_2)}=(-1)^k\frac{(1-\sqrt{1-e^2})^k}{e^k\sqrt{1-e^2}}$$

它是实的，因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos k\psi}{1+e\cos\psi}\mathrm{d}\psi=(-1)^k\frac{(1-\sqrt{1-e^2})^k}{e^k\sqrt{1-e^2}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin k\psi}{1+e\cos\psi}\mathrm{d}\psi=0 \qquad (2.8.28)$$

据(2.8.22)和(2.8.25)，我们导出为确定通过近日点时间的长期变化的方程

$$n\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}u}=\frac{3\varepsilon_1}{1-e^2}\sum_{k=1}^{5}\frac{a_k}{k}\left\{(-1)^k\frac{(1-\sqrt{1-e^2})^k}{e^k}-1\right\}$$

$$-\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(1-\frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(1+\frac{e^2}{2}\right)+\frac{3}{8}e^2\sin^2 i\cos 2\omega\right\}$$

$$(2.8.29)$$

其中 a_k 由(2.8.27)确定。若限于研究对 e 的一阶项，我们得到

$$n\frac{\mathrm{d}t_0}{\mathrm{d}u}=-\varepsilon_1(1+3e)(1-3\sin^2\omega\sin^2 i) \qquad (2.8.30)$$

§2.9 变更方程

1. 常数变易法与变更方程的区别 用常数变易法得到的扰动运动微分方程 (2.2.27) 是完全精确的。当辅助问题 (对 Hamilton函数 H_0)与原始问题相差一些小项时，在这些微分方程中的新变量(它们在辅助问题中是常数)是时间的慢变函数，由此可应用近似积分方法。与此相反，下面研究扰动运动的描述方法是基于建立对于扰动运动对给定的未扰动运动的小偏离(变更)的近似微分方程。若仅考虑偏离的一阶项，则问题归结为研究线性微分方程组，这方程组称为变更方程组。

2. 未扰动运动与扰动运动 研究一阶微分方程组

$$\dot{q}_s=Q_s(q_1,\ \cdots,\ q_n) \qquad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \qquad (2.9.1)$$

假设 t 不明显出现于方程组右边表达式中。

设已知方程组(2.9.1)的某个特解为

$$q_s=f_s(t-t_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_k)$$
$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.9.2}$$

其中包含 $k\leqslant n$ 个独立常数 C_1, …, C_k, 以后称(2.9.2)为未扰动运动。变量 q_s 在未扰动运动中的初始值用 f_s^0 表记：

当 $t=t_0$ 时, $q_s=f_s^0(0,\ C_1,\ \cdots,\ C_k)$ (2.9.3)

扰动运动与未扰动运动的差别在于，首先是初始条件的改变，其次是微分方程的改变——在方程(2.9.1)的右边出现附加项。说到它们在某种意义下的相近，当然是在某些改变小的假定下。例如，知道炮弹在不转地球上的运动以及某些考虑到的初始条件，可以谈到在考虑地球转动以及与考虑到的初始条件相差很小的条件下的扰动运动。例如，扰动理论应该指明在由未扰动运动问题解所得到的射程表达式上加以修正的方法。但当未扰动运动在真空中确定时，不能指望这个理论给出在考虑空气阻力时的满意结果。

这样，与方程组(2.9.1)一起，我们来研究微分方程组

$$\dot{q}_s=Q_s(q_1,\ \cdots,\ q_n)+\mu\Phi_s(q_1,\ \cdots,\ q_n,\ t)$$
$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.9.4}$$

其中 μ 为小参数。满足初始条件

$$t=t_0,\quad q_s=f_s^0+x_s^0 \tag{2.9.5}$$

的解称为扰动运动，其中 f_s^0 为未扰动运动的初始给定(2.9.3)，而 x_s^0 为小量，称之为初始扰动。

代替 q_s 我们引入新变量——扰动 x_s，借助下述关系

$$q_s=f_s(t-t_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_k)+x_s$$
$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.9.6}$$

微分方程(2.9.4)写成形式

$$\dot{f}_s+\dot{x}_s=Q_s(f_1+x_1,\ \cdots,\ f_n+x_n)$$
$$+\mu\Phi_s(f_1+x_1,\ \cdots,\ f_n+x_n,\ t) \tag{2.9.7}$$

但据条件，函数 f_s 是方程组(2.9.1)的解，即

$$f_s = Q_s(f_1,\ \cdots,\ f_n) \tag{2.9.8}$$

因此

$$\dot{x}_s = Q_s(f_1 + x_1,\ \cdots,\ f_n + x_n) - Q_s(f_1,\ \cdots,\ f_n) + \mu\Phi_s(f_1 + x_1, \cdots, f_n + x_n,\ t)\quad (s=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.9.9}$$

此方程组与初始条件

$$t = t_0,\ x_s = x_s^0 \tag{2.9.10}$$

一起确定扰动运动。当然，这只是问题(2.9.4)—(2.9.5)的另一种描述。

3. **变更方程** 下面的步骤在于，为利用小扰动假定，在限定的时间间隔

$$t_0 \leqslant t < t_0 + T \tag{2.9.11}$$

可用对 x_s 的级数展开式替代精确方程(2.9.9)。这时引向方程组

$$\dot{x}_s = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_r}\right)_0 x_r + \mu\Phi_s(f_1,\ \cdots,\ f_n,\ t) + R_s \quad (s=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.9.12}$$

其中"零"表示应将在未扰动运动中的变量 q_s 的表达式(2.9.2)代入所研究量中，而在组成函数 R_s时出现对扰动 x_s 的高于一阶的高次项 以及相对它的线性项

$$\mu \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial q_r}\right)_0 x_r \tag{2.9.13}$$

因为这一项有小参数 μ，可认为它是比明显出现于方 程(2.9.12)的项更高阶的小量。在一阶近似下引向研究非齐次线性方程组

$$\dot{x}_s = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_r}\right)_0 x_r + \mu\Phi(f_1,\ \cdots,\ f_n,\ t) \quad (s=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.9.14}$$

它带有依赖于时间的系数，称之为变更方程。

上述方法的可行性是以微分方程组的解对出现于其中的参数以及对初始给定的连续依赖性定理为基础的。设给定微分方程组

$$q_s = Q_s(q_1, \cdots, q_n; t; \mu_1, \cdots, \mu_p)$$
$$(s=1, \cdots, n) \tag{2.9.15}$$

它的右边对出现于其中的所有变量 q_r，t，μ_i 在某域 D 内是连续的并对这些变量具有连续偏导数。这时，此方程组在 $t=t_0$ 下取值 q_s^0 的积分是 t_0，q_s^0，μ_i 的连续函数并且在充分小的区域 δ 上对 t_0，q_s^0，μ_i 有连续的偏导数。这个定理的内容应这样表达：设

$$q_s(t, t_0, f_1^0, \cdots, f_n^0; \mu_1^0, \cdots, \mu_p^0)$$
$$(s=1, \cdots, n) \tag{2.9.16}$$

是微分方程组(2.9.15)在 $t=t_0$ 取值 $q_s=f_s^0$、在参数 μ_i 的固定值 μ_i^0 下的解。这时，给定充分小的正数 ε_s，可以确定正数 η_s 及 M_i，使得当

$$|q_s^0 - f_s^0| < \eta_s, \quad |\mu_i - \mu_i^0| < M_i$$
$$(s=1, \cdots, n; \ i=1, \cdots, p) \tag{2.9.17}$$

上述方程组的解

$$q_s(t, t_0, q_1^0, \cdots\cdots q_n^0, \mu_1, \cdots, \mu_p)$$
$$(s=1, \cdots, n) \tag{2.9.18}$$

在某时间间隔(2.9.11)内满足不等式

$$|q_s(t, t_0, q_1^0, \cdots, q_n^0; \mu_1, \cdots, \mu_p) - q_s(t, t_0, f_1^0, \cdots f_n^0; \mu_1^0, \cdots, \mu_p^0)| < \varepsilon_s \tag{2.9.19}$$
$$(s=1, \cdots, n)$$

必须注意，按事先给出的 ε_s 确定的量 η_s 和 M_i 一般说依赖于 T。自然，T 愈大则它们愈小。如果 η_s 和 M_i 可如此选取，使得不等式(2.9.19)在任意大的 $t>t_0$ 下成立，那么未扰动运动(2.9.16) 在Ляпунов 意义下是稳定的。实际上，有或没有Ляпунов 意义的稳定性都能由所研究的变更方程确定。

§2.10 关于变更方程的积分

1. 齐次方程组的积分 首先研究齐次方程组的积分，再用常数变易法研究非齐次方程组的积分。

与变更方程组(2.9.14)相应的线性齐次方程组为

$$\dot{x}_s=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_r}\right)_0 x_r \quad (s=1,\ \cdots,\ n) \qquad (2.10.1)$$

下面要寻求方程组(2.10.1)的特解，而在某些情况下要找全积分。未扰动运动方程组(2.9.1)的解(2.9.2)对每个常数 C_i 的偏导数

$$\eta_s^{(i)}=\frac{\partial f_s}{\partial C_i}$$

$$(s=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k) \qquad (2.10.2)$$

以及它对时间的导数

$$\eta_s^{(k+1)}=\dot{f}_s \qquad (2.10.3)$$

是线性齐次方程组(2.10.1)的特解。

为验证这一结论，我们将等式(2.9.8)对 C_i 和对 t 求导数，得到

$$\frac{\partial \dot{f}_s}{\partial C_i}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial Q_s}{\partial f_r}\frac{\partial f_r}{\partial C_i}, \qquad \ddot{f}_s=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial Q_s}{\partial f_r}\dot{f}_r$$

或者用另一种写法为

$$\dot{\eta}_s^{(i)}=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_r}\right)_0\eta_r^{(i)}$$

$$\dot{\eta}_s^{(k+1)}=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_r}\right)_0\eta_r^{(k+1)} \qquad (2.10.4)$$

这就变为方程(2.10.1)，从而证明了上述结论。注意到当 $k=n$

n时，特解(2.10.3)是解(2.10.2)的总合，因为它可由对出现于解(2.9.2)中的常数 t_0 求导数而得到。

假设已知未扰动运动方程组(2.9.1)的 Cauchy 积分

$$q_s=f_s(t-t_0,\ q_1^0,\ \cdots,\ q_n^0) \qquad (2.10.5)$$

因此

$$q_s^0=f_s(0,\ q_1^0,\ \cdots,\ q_n^0),\quad \left(\frac{\partial f_s}{\partial q_i^0}\right)_{t=t_0}=\delta_{is} \qquad (2.10.6)$$

其中 δ_{is} 为 Kronecker 记号。由关系(2.10.2)我们得到齐次方程组(2.10.1)的完全组

$$\eta_s^{(i)}(t)=\frac{\partial f_s}{\partial q_i^0} \qquad (s,\ i=1,\ \cdots,\ n) \qquad (2.10.7)$$

它们满足初始条件

$$\eta_s^{(i)}(0)=\delta_{is} \qquad (s,\ i=1,\ \cdots,\ n) \qquad (2.10.8)$$

它组成单位矩阵(设 $t_0=0$)。线性微分方程组的行列式

$$D(t)=\begin{vmatrix}\eta_1^{(1)}, & \cdots, & \eta_1^{(n)}\\ \eta_n^{(1)}, & \cdots, & \eta_n^{(n)}\end{vmatrix}=D(0)\exp\left[\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_s}\right)_0 dt\right] \qquad (2.10.9)$$

因 $D(0)=1$，故行列式异于零。解(2.10.7)组成基本解组——带有对齐次微分方程组的初始条件的单位矩阵的独立解组。因此

$$x_s=\sum_{k=1}^{n}x_k^0\eta_s^{(k)}(t) \qquad (s=1,\ \cdots,\ n) \qquad (2.10.10)$$

是 Cauchy 积分。

2 变更方程组的积分 线性变更方程组(2.9.14)，即

$$\dot{x}_s=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial q_r}\right)_0 x_r+\mu\Phi_s(f_1,\ \cdots,\ f_n,\ t) \qquad (2.10.11)$$

的 Cauchy 积分容易用常数变易法求得。设

初始给定彼此相差甚小。这样就可将邻近运动方程作为支撑运动的变更方程来研究(图 2-8)。

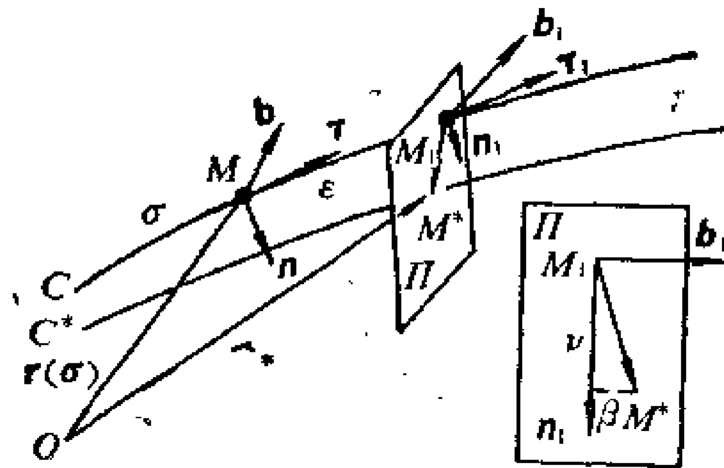


图2-8

点 M 在支撑曲线上的位置由矢径 $\boldsymbol{r}(\sigma)$确定。设通过 M^* 的支撑曲线的法平面Π与此曲线在 M_1 点以矢径 $\boldsymbol{r}(\sigma+\varepsilon)$相交；用 $\boldsymbol{\tau}_1$，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{b}_1$ 表示支撑曲线在点 M_1 的自然三面角的单位矢量；矢量$\overrightarrow{M_1M^*}$在平面 Π 上在 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{b}_1$ 方向的投影记作 ν，β。此时点 M^* 的矢径 $\boldsymbol{r}^*$有形式

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(\sigma+\varepsilon)+\boldsymbol{n}_1\nu+\boldsymbol{b}_1\beta \qquad (2.11.2)$$

为将 $\boldsymbol{r}^*$表为 $\boldsymbol{r}$，ε，ν，β 的函数，需展开 $\boldsymbol{r}(\sigma+\varepsilon)$，这就涉及到 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 对 σ 的导数计算。因此，下面给出 Frenet-Serret 公式。

2. Frenet-Serret 公式 我们用运动学方法导出微分几何中著名的 Frenet-Serret 公式。这公式给出单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$ 对弧长σ的导数表达式。

由运动学知识，有

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\sigma} \qquad (2.11.3)$$

$$\boldsymbol{n}=\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}\sigma} \qquad (2.11.4)$$

我们来求三面角的角速度Ω在自然轴上的投影 Ω_1，Ω_2，Ω_3。为此，研究一点 N，它与三面角固联；它对顶点的矢径$\overrightarrow{MN}$用$\boldsymbol{r}'$表记，$\boldsymbol{r}'$在自然三面角轴上的投影用 a_1，a_2，a_3 表示。设

$$\boldsymbol{v}_0=\dot{\boldsymbol{r}}=\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\dot{\sigma}=\boldsymbol{\tau}\dot{\sigma}$$

表示自然三面角顶点的速度。点 N 的速度等于

$$\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{r}}'=\boldsymbol{\tau}\dot{\sigma}+(a_1\boldsymbol{\tau}+a_2\boldsymbol{n}+a_3\boldsymbol{b})^{\cdot}$$

$$=\left(\boldsymbol{\tau}+a_1\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}+a_2\frac{d\boldsymbol{n}}{d\sigma}+a_3\frac{d\boldsymbol{b}}{d\sigma}\right)\dot{\sigma}\qquad(2.11.5)$$

另一方面据刚体运动学公式，有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\Omega\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\tau}\cdot\dot{\sigma}+\boldsymbol{\tau}(\Omega_2a_3-\Omega_3a_2)+\boldsymbol{n}(\Omega_3a_1$$

$$-\Omega_1a_3)+\boldsymbol{b}(\Omega_1a_2-\Omega_2a_1)\qquad(2.11.6)$$

比较(2.11.5)与(2.11.6)，由于 a_1，a_2，a_3 的任意性，得到三个等式

$$\dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}=\Omega_3\boldsymbol{n}-\Omega_2\boldsymbol{b},\quad \dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{n}}{d\sigma}=\Omega_1\boldsymbol{b}-\Omega_3\boldsymbol{\tau}$$

$$\dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{b}}{d\sigma}=\Omega_2\boldsymbol{\tau}-\Omega_1\boldsymbol{n}\qquad(2.11.7)$$

由第一式及(2.11.4)得到关系

$$\Omega_2=0,\ \Omega_3=\frac{\dot{\sigma}}{\rho}\qquad(2.11.8)$$

量 Ω_1 由(2.11.7)第三式确定

$$\Omega_1=-\dot{\sigma}\frac{d\boldsymbol{b}}{d\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\qquad(2.11.9)$$

因

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$$

将其对 σ 求导数并注意到(2.11.4)，得到

因此，精确到二阶小量，有

$$r^{*}=r+\tau\varepsilon\left(1-\frac{\nu}{\rho}\right)+n\left(\nu+\frac{\varepsilon^{2}}{2\rho}-\frac{\varepsilon\beta}{T}\right)+b\left(\beta+\frac{\varepsilon\nu}{T}\right) \tag{2.11.14}$$

在计算点 M^{*} 的速度矢量和加速度矢量时限于一阶小项，我们得到

$$\left.\begin{aligned}
v^{*}=&v+\tau\left(\dot{\varepsilon}-\frac{\nu\dot{\sigma}}{\rho}\right)+n\left(\dot{\nu}+\frac{\varepsilon\dot{\sigma}}{\rho}\right.\\
&\left.-\frac{\beta\dot{\sigma}}{T}\right)+b\left(\dot{\beta}+\frac{\nu\dot{\sigma}}{T}\right)\\
a^{*}=&a+\tau\left\{\ddot{\varepsilon}-\frac{\dot{\nu}\dot{\sigma}}{\rho}+\frac{\nu\dot{\sigma}^{2}}{\rho^{2}}\rho'\right.\\
&\left.-\frac{\nu\ddot{\sigma}}{\rho}-\frac{\dot{\sigma}}{\rho}\left(\dot{\nu}+\frac{\varepsilon\dot{\sigma}}{\rho}-\frac{\beta\dot{\sigma}}{T}\right)\right\}\\
&+n\left\{\ddot{\nu}+\frac{\dot{\varepsilon}\dot{\sigma}}{\rho}-\frac{\varepsilon\dot{\sigma}^{2}}{\rho^{2}}\rho'+\frac{\varepsilon\ddot{\sigma}}{\rho}\right.\\
&-\frac{\dot{\beta}\dot{\sigma}}{T}+\frac{\beta\dot{\sigma}^{2}}{T^{2}}T'-\frac{\beta\ddot{\sigma}}{T}\\
&\left.+\frac{\dot{\sigma}}{\rho}\left(\dot{\varepsilon}-\frac{\nu\dot{\sigma}}{\rho}\right)-\frac{\dot{\sigma}}{T}\left(\dot{\beta}+\frac{\nu\dot{\sigma}}{T}\right)\right\}\\
&+b\left\{\ddot{\beta}+\frac{\dot{\nu}\dot{\sigma}}{T}-\frac{\nu\dot{\sigma}^{2}}{T^{2}}T'+\frac{\nu\ddot{\sigma}}{T}\right.\\
&\left.+\frac{\dot{\sigma}}{T}\left(\dot{\nu}+\frac{\varepsilon\dot{\sigma}}{\rho}-\frac{\beta\dot{\sigma}}{T}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{2.11.15}$$

其中“一撇”表示对弧长 σ 的导数。将运动方程的矢量形式写成

$$a^{*}-a=F^{*}-F$$

我们便得到三个变更微分方程

$$\ddot{\varepsilon} - 2\frac{\dot{v}\dot{\sigma}}{\rho} - \frac{v}{\rho}F_\tau + \frac{v\rho'}{\rho}F_n - \frac{\varepsilon}{\rho}F_n + \frac{\beta}{T}F_n = F_\tau^* - F \tag{2.11.16}$$

$$\ddot{v} + 2\frac{\dot{\varepsilon}\dot{\sigma}}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\rho}F_\tau - \frac{\varepsilon\rho'}{\rho}F_n - \frac{v}{\rho}F_n - 2\frac{\dot{\sigma}\dot{\beta}}{T} - \frac{\beta}{T}F_\tau + \frac{\rho F_n}{T^2}(\beta T' - v) = F_n^* - F_n \tag{2.11.17}$$

$$\ddot{\beta} + 2\frac{\dot{v}\dot{\sigma}}{T} + \frac{v}{T}F_\tau + \frac{\varepsilon}{T}F_n - \frac{\rho F_n}{T^2}(vT' + \beta) = F_b^* \tag{2.11.18}$$

在上述写法中$\ddot{\sigma}$和$\dot{\sigma}^2$已用未扰动运动方程(2.11.1)中的值来替代。由推导过程看到F_τ^*，F_n^*，F_b^*代表作用在点M^*(在扰动运动中)的力F^*在点M的自然三面角轴上的投影。

4. **力F^*的具体表达式** 现在详细说明F^*的投影F_τ^*,F_n^*,F_b^*的计算。

由确定点M^*位置的矢量$\boldsymbol{r}^*$的表达式(2.11.2)得知，量

$$q^1 = \sigma + \varepsilon, \quad q^2 = v, \quad q^3 = \beta \tag{2.11.19}$$

可作为曲线坐标来研究。未扰动运动相应于值$q_0^1 = \sigma$，$q_0^2 = q_0^3 = 0$。此坐标系的基矢量为

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}^*}{\partial q^1} = \boldsymbol{\tau}_1\left(1 - \frac{v}{\rho_1}\right) - \boldsymbol{n}_1\frac{\beta}{T_1} + \frac{v}{T_1}\boldsymbol{b}_1$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{n}_1, \quad \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{b}_1$$

由此借助Frenet-Serret公式，舍去二阶项，我们求得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{\tau}\left(1 - \frac{v}{\rho}\right) + \boldsymbol{n}\left(\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{\beta}{T}\right) + \boldsymbol{b}\frac{v}{T} \\ \boldsymbol{r}_2 &= -\boldsymbol{\tau}\frac{\varepsilon}{\rho} + \boldsymbol{n} + \boldsymbol{b}\frac{\varepsilon}{T} \\ \boldsymbol{r}_3 &= -\boldsymbol{n}\frac{\varepsilon}{T} + \boldsymbol{b} \end{aligned}\right\} \tag{2.11.20}$$

$$(F^*)_0=F=F_\tau\tau+F_n n=-\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q^s}r^s\right)_0$$

$$=-\left[\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q^1}\right)_0\tau+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q^2}\right)n+\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q^3}\right)_0 b\right]$$

而因此

$$-\frac{\partial\Pi_0}{\partial\sigma}=F_\tau,\ -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\nu}\right)_0=F_n,\quad\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\beta}\right)_0=0\qquad(2.11.24)$$

这里 $\Pi_0=\Pi(q_0^1,\ q_0^2,\ q_0^3)=\Pi(\sigma,\ 0,\ 0)$为势能在支撑曲线上的值。转向力的表达式(2.11.23)，我们有

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q^s}=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q^s}\right)_0+\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^k\partial q^s}\right)_0(q^k-q_0^k)+\cdots$$

或者考虑到(2.11.24)，有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Pi}{\partial q^1}&=-\left(F_\tau+s\frac{dF_\tau}{d\sigma}+\nu\frac{dF_n}{d\sigma}\right)+\cdots\\
\frac{\partial\Pi}{\partial q^2}&=-\left\{F_n+s\frac{dF_n}{d\sigma}-\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\nu^2}\right)_0\nu\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\nu\partial\beta}\right)_0\beta\right\}+\cdots\\
\frac{\partial\Pi}{\partial q^3}&=\nu\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\nu\partial\beta}\right)_0+\beta\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial\beta^2}\right)_0+\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad(2.11.25)$$

据(2.11.21)、(2.11.23)和(2.11.25)，我们得到

$$\begin{aligned}
F_\tau^*&=-\frac{\partial\Pi}{\partial q^1}\left(1+\frac{\nu}{\rho}\right)-\frac{\partial\Pi}{\partial q^2}\left(\frac{\beta}{T}-\frac{s}{\rho}\right)\\
&=F_\tau\left(1+\frac{\nu}{\rho}\right)+s\frac{dF_\tau}{d\sigma}+\nu\frac{dF_n}{d\sigma}\\
&\quad+F_n\left(\frac{\beta}{T}-\frac{s}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
F_n^* &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}\frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{\partial \Pi}{\partial q^2} + \frac{\partial \Pi}{\partial q^3}\frac{\varepsilon}{T} \\
&= F\frac{\varepsilon}{\rho} + F_n + \varepsilon\frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}\sigma} \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2}\right)_0 \nu - \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta \partial \nu}\right)_0 \beta \\
F_b^* &= -\frac{\partial \Pi}{\partial q^2}\frac{\varepsilon}{T} - \frac{\partial \Pi}{\partial q^3} = \frac{\varepsilon}{T}F_n \\
&\quad - \nu\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu \partial \beta}\right) - \beta\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta^2}\right)_0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.11.26)
$$

需将这些表达式代入(2.11.16)—(2.11.18)。因此，建立变更方程必须知道力在支撑轨道上的值以及势能在此轨道上的二阶导数值

$$
\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu \partial \beta}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta^2}\right)
$$

我们来研究阻力依赖于速度的情形，有

$$
\boldsymbol{F}^* = -f(v^*)\boldsymbol{\tau}^* \qquad (2.11.27)
$$

按(2.11.15)，有

$$
\left.\begin{aligned}
v^* &= \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau} + \dot{\varepsilon} - \frac{\nu\dot{\sigma}}{\rho} = \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon} - \frac{\nu\dot{\sigma}}{\rho} \\
\boldsymbol{\tau}^* &= \frac{\boldsymbol{v}^*}{v^*} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{n}\left(\dot{\nu} + \frac{\varepsilon\dot{\sigma}}{\rho} - \frac{\beta\dot{\sigma}}{T}\right)\frac{1}{\dot{\sigma}} \\
&\quad + \boldsymbol{b}\left(\dot{\beta} + \frac{\dot{\sigma}\nu}{T}\right)\frac{1}{\dot{\sigma}}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.11.28)
$$

在未扰动运动中

$$
\boldsymbol{F} = -f(v)\boldsymbol{\tau}, \quad F_\tau = -f(v), \quad F_n = 0, \quad F_b = 0 \qquad (2.11.29)
$$

还要注意到

$$f(v^*) = f(\dot{\sigma}) + f'(\dot{\sigma})\left(\dot{\varepsilon} - \frac{v\dot{\sigma}}{\rho}\right)$$

我们得到

$$\left.\begin{aligned} F_\tau^* - F_\tau &= -f'(\dot{\sigma})\left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{v}\sigma}{T}\right) \\ F_n^* &= -\frac{f(\dot{\sigma})}{\dot{\sigma}}\left(\dot{v} + \frac{\varepsilon\dot{\sigma}}{\rho} - \frac{\beta\dot{\sigma}}{T}\right) \\ F_b^* &= -\frac{f(\dot{\sigma})}{\dot{\sigma}}\left(\dot{\beta} + \frac{\dot{\sigma}v}{T}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.11.30)$$

§2.12 圆轨道上扰动Kepler运动

1. 中心力场中的变更方程 在中心力场

$$\boldsymbol{F} = -\psi(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad (2.12.1)$$

中，质点在某些条件下可在圆轨道上运动。在此轨道上

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad (2.12.2)$$

而因此

$$F_n = \frac{v^2}{r}, \ F_\tau = 0, \ F_b = 0 \quad (2.12.3)$$

第二个方程表明运动中点的速度保持常值，由第一个方程知道它等于

$$v = \sqrt{r\psi(r)} \quad (2.12.4)$$

因此，如果点的初速度垂直于矢径并按(2.12.4)确定其大小，那么可实现圆运动。在扰动运动中点的矢径 $\boldsymbol{r}^*$ 由表达式(2.11.14)给出，而现在取 $\rho = r$，$T = \infty$。我们得到

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\tau}\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon v}{T}\right) + \boldsymbol{n}\left(v + \frac{\varepsilon^2}{2r}\right) + \boldsymbol{b}\beta \quad (2.12.5)$$

中心场势能在扰动运动中等于

$$\Pi(r^*)=\int^{r^*}\psi(x)\mathrm{d}x \tag{2.12.6}$$

需要求出这个表达式在支撑(圆)轨道上出现于(2.11.26)中的二阶导数的值。为此，注意到

$$\frac{\partial r^*}{\partial \nu}=\frac{1}{r^*}r^*\cdot\frac{\partial r^*}{\partial \nu}=\frac{1}{r^*}r^*\cdot\left(-\frac{\varepsilon}{r}\tau+n\right)$$

$$\approx-\frac{r}{r^*}+\frac{\nu}{r^*}$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial \beta}=\frac{1}{r^*}r^*\cdot\frac{\partial r^*}{\partial \beta}=\frac{1}{r^*}r^*\cdot b=\frac{\beta}{r^*}$$

因此

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \nu}=\psi(r^*)\frac{\partial r^*}{\partial \nu}\approx-\frac{r}{r^*}\psi(r^*)+\frac{\nu}{r}\psi(r)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta}\approx\frac{\psi(r)}{r}\beta$$

而

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2}\right)_0=\left\{\frac{\psi(r)}{r}-\psi'(r)\right\}\left(\frac{\partial r^*}{\partial \nu}\right)_0\\&\qquad\qquad+\frac{\psi(r)}{r}=\psi'(r)\\&\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu\partial \beta}\right)_0=0,\quad\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \beta^2}\right)_0=\frac{\psi(x)}{r}\end{aligned}\right\} \tag{2.12.7}$$

如果考虑到(2.11.26)、(2.12.3)和(2.12.7)，那么变更方程(2.11.16)—(2.11.18)可写成形式

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{\varepsilon}-2\dot{\nu}\sqrt{\frac{\psi(r)}{r}}=0\\
&\ddot{\nu}+2\dot{\varepsilon}\sqrt{\frac{\psi(r)}{r}}+\nu\left\{\psi'(r)-\frac{\psi(r)}{r}\right\}=0\\
&\ddot{\beta}+\frac{\psi(r)}{r}\beta=0
\end{aligned}\right\}\qquad(2.12.8)
$$

特别地，在地球卫星圆轨道的扰动问题中，有

$$
\psi(r)=\frac{\mu}{r^2}=\frac{v^2}{r},\quad \psi'(r)=-\frac{2\mu}{r^3}=-\frac{2v^2}{r^2}
$$

而方程(2.12.18)取形式

$$
\left.\begin{aligned}
&\ddot{\varepsilon}-2\frac{v}{r}\dot{\nu}=0\\
&\ddot{\nu}+2\frac{v}{r}\dot{\varepsilon}-3\frac{v^2}{r^2}\nu=0\\
&\ddot{\beta}+\frac{v^2}{r^2}\beta=0
\end{aligned}\right\}\qquad(2.12.9)
$$

如果引进新的独立变量

$$
u=\frac{v}{r}t \qquad (2.12.10)
$$

那么方程(2.12.9)可写成形式

$$
\frac{d^2\varepsilon}{du^2}-2\frac{d\nu}{du}=0,\qquad \frac{d^2\nu}{du^2}+2\frac{d\varepsilon}{du}-3\nu=0
$$

$$
\frac{d^2\beta}{du^2}+\beta=0 \qquad (2.12.11)
$$

(2.12.10)是从圆轨道进入节点计起的矢径的 转 角。方程(2.12.11)的解是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\varepsilon}{du}&=3(2\nu_0-\varepsilon_0')+2(2\varepsilon_0'-3\nu_0)\cos u\\
&\qquad+2\nu_0'\sin u\\
\nu&=4\nu_0-2\varepsilon_0'+(2\varepsilon_0'-3\nu_0)\cos u+\nu_0'\sin u\\
\beta&=\beta_0\cos u+\beta_0'\sin u
\end{aligned}\right\}\qquad(2.12.12)
$$

量。垂直于轨道平面的分力具有卫星在轨道上的频率——这里有共振条件。

方程组(2.12.15)在零初始给定下的解有形式

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta_1 &= 2\alpha_1\left[\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 i\right)u-\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 i\right)\sin u\right.\\
&\qquad\left.+\frac{5}{24}\sin^2 i\sin 2u\right]\\
\delta_2 &= -\alpha_1\left[\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 i\right)\cos u-\frac{1}{6}\sin^2 i\cos 2u\right.\\
&\qquad\left.-1+\frac{1}{2}\sin^2 i\right]\\
\delta_3 &= \frac{1}{2}\alpha_1\sin 2i(u\cos u-\sin u)
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.12.16}
$$

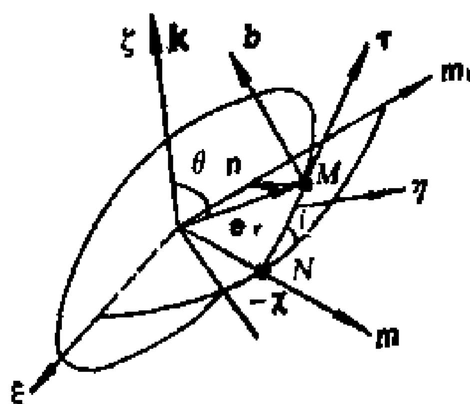


图2-9

点在扰动运动中的矢径由以下等式确定

$$
\frac{1}{r}\boldsymbol{r}^*=-\boldsymbol{n}\left(1-\frac{R_0}{r}\delta_2\right)+\frac{R_0}{r}\left(\boldsymbol{\tau}\delta_1+\boldsymbol{b}\delta_3\right) \tag{2.12.17}
$$

这可由(2.12.2)、(2.12.14)和(2.11.14)得到。相应的单位矢量 $\boldsymbol{e}_r^*$ 为

$$
\boldsymbol{e}_r^*=-\boldsymbol{n}+\frac{R_0}{r}(\boldsymbol{\tau}\delta_1+\boldsymbol{b}\delta_3) \tag{2.12.18}
$$

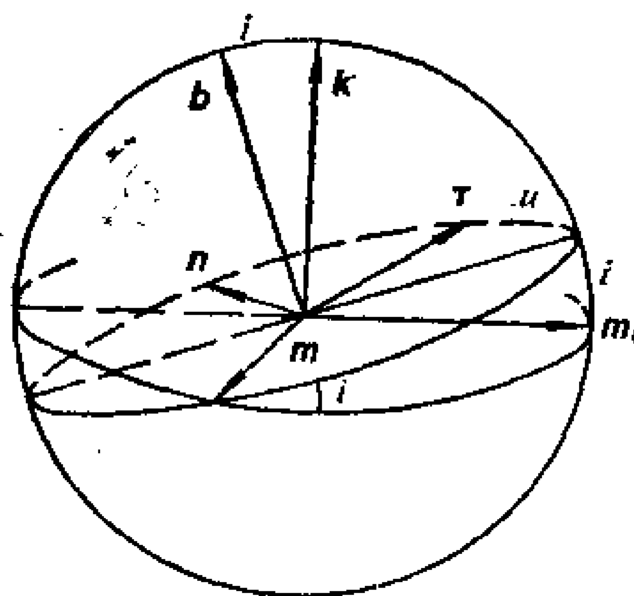


图2-10

设 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{m}_1$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示未扰动运动节线的、在赤道平面上与节线相垂直的线以及与此平面相垂直的线的单位矢量。此时有(图 2-9 与图2-10)

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}&=-\boldsymbol{m}\sin u+\cos u(\boldsymbol{m}_1\cos i+\boldsymbol{k}\sin i)\\ \boldsymbol{n}&=-\boldsymbol{m}\cos u-\sin u(\boldsymbol{m}_1\cos i+\boldsymbol{k}\sin i)\\ \boldsymbol{b}&=-\boldsymbol{m}_1\sin i+\boldsymbol{k}\cos i\end{aligned}\right\}\qquad(2.12.19)$$

而表达式 $\boldsymbol{e}_r^*$ 取形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_r^*=&\boldsymbol{m}\left(\cos u-\frac{R_0}{r}\delta_1\sin u\right)+\boldsymbol{m}_1\left(\cos i\sin u+\frac{R_0}{r}\delta_1\cos i\cos u\right.\\&\left.-\frac{R_0}{r}\delta_3\sin i\right)+\boldsymbol{k}\left(\sin i\sin u+\frac{R_0}{r}\delta_1\cos u\sin i\right.\\&\left.+\frac{R_0}{r}\delta_3\cos i\right)\end{aligned}\qquad(2.12.20)$$

据条件在 $u=0$ 时卫星通过进入节点，相应于下一次通过节点的变量记作 $2\pi+\psi$，其中 ψ 为小量。在此位置上角 θ(纬度的余角)

$$\cos\theta = \boldsymbol{e}_r^* \cdot \boldsymbol{k} = \sin i\left(\sin x + \frac{x\psi}{2\pi}\cos x\right) + \frac{R_0}{r}\left(\delta_1 \cos u \sin i + \delta_3 \cos i\right)$$

并且在后一项中 u 用 x 替代，忽略二阶小项。利用公式(2.12.21)和(2.12.16)，我们得到

$$\cos\theta = \sin i \sin x\left[1 - \frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left\{\left(2 - \frac{2}{3}\sin^2 i\right)\cos x - \frac{5}{6}\cos^2 x \sin^2 i + \cos^2 i\right\}\right] \tag{2.12.25}$$

若用 λ 表记卫星经度，我们还有

$$\sin\theta\cos\lambda = \boldsymbol{e}_r^* \cdot \boldsymbol{m} = \cos x - \frac{x\psi}{2\pi}\sin x - \frac{R_0}{r}\delta_1(x)\sin x$$

$$\sin\theta\sin\lambda = \boldsymbol{e}_r^* \cdot \boldsymbol{m}_1 = \cos i\left(\sin x + \frac{x\psi}{2\pi}\cos x\right) + \frac{R_0}{r}\left[\delta_1(x)\cos x \cos i - \delta_3(x)\sin i\right]$$

或者，利用上述公式，有

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta\cos\lambda &= \cos x\left[1 + \frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left\{x\,\mathrm{tg}\,x\cos^2 i + \frac{2 - \frac{2}{3}\sin^2 i}{\cos x}\sin^2 x - \frac{5}{6}\sin^2 i \sin^2 x\right\}\right] \\
\sin\theta\sin\lambda &= \cos i \sin x\left[1 - \frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left\{x\,\mathrm{ctg}\,x + \left(2 - \frac{2}{3}\sin^2 i\right)\cos x - \frac{5}{6}\sin^2 i\cos^2 x - \sin^2 i\right\}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{2.12.26}$$

因此

$$\mathrm{tg}\lambda=\cos i\,\mathrm{tg}x\left[1-\frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left\{x(\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x\cos^2 i)+\frac{2-\frac{2}{3}\sin^2 i}{\cos x}-\frac{11}{6}\sin^2 i\right\}\right] \tag{2.12.27}$$

现将变量 x 用时间 t 表示。经度 λ 不出现于扰动力势能的表达式中。因此在扰动运动中有对轴 $o\zeta$ 的动量矩积分

$$p_\lambda=r^{*2}\sin^2\theta\,\dot{\lambda}=\beta_\lambda$$

但在初始时刻扰动 δ_1，δ_2，δ_3 及其导数等于零，因此常数 β_λ可按以速度 v 沿圆轨道运动计算出来

$$\beta_\lambda=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\tau}v)\cdot\boldsymbol{k}=-rv(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{k}=rv\cos i$$

这样

$$\dot{\lambda}=\frac{rv\cos i}{r^{*2}\sin^2\theta} \tag{2.12.28}$$

另一方面，对表达式(2.12.17)求导，得到

$$\frac{\dot{\lambda}}{\cos^2\lambda}=\frac{\cos i}{\cos^2 x}\dot{x}\left\{1-\frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left(\cos^2 x+\sin^2 x\cos^2 i+2x\,\mathrm{tg}x\cos^2 i+\frac{2-\frac{2}{3}\sin^2 i}{\cos x}(1+\sin^2 x)-\frac{11}{6}\sin^2 i\right)\right\} \tag{2.12.29}$$

由(2.2.17)有

$$r^{*2}=r^2\left[1+2\frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left\{\left(1-\frac{1}{3}\sin^2 i\right)\cos x-\frac{1}{6}\sin^2 i\cos 2x-1+\frac{1}{2}\sin^2 i\right\}\right] \tag{2.12.30}$$

将(2.12.30)代入(2.12.28)，再将所得$\dot{\lambda}$ 以 及 由(2.12.26)确定的 $\sin\theta\cos\lambda$ 代入(2.12.29)，我们得到简单表达式

$$\dot{x}=\frac{v}{r}\left\{1+\frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left(3-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right\} \tag{2.12.31}$$

由此得到

$$t-t_0=\frac{r}{v}x\left\{1-\frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left(3-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right\} \tag{2.12.32}$$

其中 t_0 为通过进入节点的时间。下一次通过进入节点(在新的位置上)在 $x=2\pi$ 时。称这个时间间隔为周期，我们得到

$$T=T_0\left\{1-\frac{R_0^2}{r^2}\alpha\left(3-\frac{5}{2}\sin^2 i\right)\right\} \tag{2.12.33}$$

并且 T_0 为未扰动运动中沿圆轨道的周期

$$T_0=2\pi\frac{r}{v} \tag{2.12.34}$$

习 题

1. 试对原始方程 $m\ddot{q}+k(q+\varepsilon q^2)=0(\varepsilon\ll 1)$ 在初始条件 $t=0$，$q=\alpha$，$\dot{q}=\beta/m$ 下建立扰动方程(2.1.10)，并按(2.1.12)求出一次近似解。

2. 不计地球自转和重力随高度的变化，试研究单位质量的重质点在阻力与速度成比例的介质中的运动规律。假设阻力很小。

3. 试将 Van der Pol方程 $\ddot{x}+x=\varepsilon\dot{x}(1-x^2)$ 的解表为变更方程的 Cauchy 积分(2.10.15)。令 $x_1=x$，$x_2=\dot{x}$，未扰动运动的初条件为 $t=0$，$x_1=x_{10}$，$x_2=x_{20}$。

参考文献

[1] Лурье.А.И，Аналитическая Механика，ФМ，1961.

[2] 刘成群，求解契塔耶夫非完整系统的常数变易法，重庆大学学报，1981年第二期。

[3] 梅凤翔，分析力学基础，北京工业学院，1983年。

第三章　动力学控制

力学系统的运动依赖于作用力及所加的约束。因此，既可借助于力来控制运动，也可借助于约束来控制运动。前一类控制称为动力学控制，后一类控制称为运动学控制[1]。

这一章讲述动力学控制的基本思想，包括运动方程的研究，刚体转动运动的控制，刚体系统的控制，位形空间和相空间中的控制等。主要取材于文献[2]。

至于运动学控制的研究可参见文献[1,3—6]。

§3.1　运动方程的研究

1. 线性矢量函数的研究　我们研究线性矢量函数

$$F(t,X)=A(t)X$$

其中 $A(t)$ 为 n 阶实方阵，X 为实欧氏空间 E_n 中的 n 维矢量。取

$$G(t,X)=\frac{1}{2}[A+A^*]X,\ H(t,X)=\frac{1}{2}(A-A^*)X①$$

此时有

$$F(t,X)=G(t,X)+H(t,X) \tag{3.1.1}$$

进而，令

$$V=-\frac{1}{4}X^*[A+A^*]X$$

这时

$$G(t,X)=-\mathrm{grad}V$$

①本章中 X 表示矢量，A^* 为 A 的转置。

在标量写法下有形式

$$G_s=-\frac{\partial V}{\partial X_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.1.2}$$

二次形 V 有依赖于参数 t 的系数，因此矢量场 $G(t,X)$ 可研究作为广义意义下的有势场。此时，函数 V 是这个场的势。

我们计算场 H 在沿点的矢经位移时的元功，点的矢径是指对空间 E_n 的坐标原点而言的。将此功记作 Δ，所指位移用 δ_X 表示，我们得

$$\Delta=\delta_X H=\mathrm{d}tX^*H=\mathrm{d}t\ aX^*H$$

因为 $X^*H=0$，那么我们有 $\Delta=0$。在推导中已利用如下事实：位移速度由微分方程组 $\dot{X}^*=aX^*$ 确定，其中 a 为某标量函数。

因此，当矢量场对矢量 X 的分量是线性时，它总可以写成形式(3.1.1)，其中 G 为广义势场，H 为旋度型场。确切地说，场 H 在沿矢径位移时不作功。

上面的结论在一般情形中也是对的。

定理3.1.1 如果函数 $F(t,X)$ 在 $t\geqslant0$，$X\in E_n$ 上给定、实的且连续，函数

$$W(t,X)=X^*F(t,X) \tag{3.1.3}$$

对矢量 X 的分量连续可微，那么存在函数 $V=V(t,X)$ 在 $t\geqslant0$，$X\in E_n$ 上给定、实的且连续的，对 X 的分量连续可微，使得矢量场 F 取形式(3.1.1)，其中 G 用函数 V 按公式(3.1.2)确定，而在沿矢径的位移不作功的场 H 为

$$H(t,X)=PX \tag{3.1.4}$$

其中 P 为 n 阶反对称矩阵，它的元素一般说来是参数 t 和矢量 X 分量的函数。

［证明］ 设场 $F(t,X)$ 有形式(3.1.1)，这时由(3.1.3)和(3.1.4)有

$$X^*F=X^*G=W$$

利用(3.1.2)求得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(-X_s\frac{\partial V}{\partial X_s}\right)=W \qquad (3.1.5)$$

我们来求方程(3.1.5)的解，此解满足条件$V\big|_{X=0}=0$，对矢量X的分量是实的、连续的且连续可微的。设已找到这样的解：$V=V(t,X)$。在方程组

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau}=-X \qquad (3.1.6)$$

的积分曲线$X(\tau)=X_0\mathrm{e}^{-\tau}$上计算这个解。我们有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tau}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_s}\frac{\partial X_s}{\partial \tau}$$

考虑到(3.1.5)和(3.1.6)，求得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tau}=W(t,X(\tau)) \qquad (3.1.7)$$

这里及以后将t作为参数来研究。将(3.1.7)由0至τ积分，得到

$$V(t,X(\tau))-V(t,X_0)=\int_0^{\tau}W(t,X(\tau))\mathrm{d}\tau$$

考虑到函数V的连续性，限制条件$V(t,0)\equiv 0$以及条件$X(\tau)\to 0$(当$\tau\to\infty$时)，我们求得

$$V(t,X_0)=-\int_0^{\infty}W(t,X(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (3.1.8)$$

此外，公式(3.1.8)可写成形式

$$V(t,X)=-\int_0^{\infty}W(t,X\mathrm{e}^{-\tau})\mathrm{d}\tau \qquad (3.1.9)$$

可以证明，关系(3.1.9)在$t\geqslant 0$，$X\in E_n$上确定一给定函数，此函数对X的分量是实的、连续的且连续可微的。函数(3.1.9)必满足条件$V(t,0)\equiv 0$并且是方程(3.1.6)的解。

现在用函数$V(t,X)$借助公式(3.1.2)确定场G，并取

.11)；G 同上为有势场，而 H 为在沿(3.1.10)积分曲线上位移不作功的场。换言之，要求

$$\Delta = \delta_X H = 0$$

由此有

$$\delta_X H = \mathrm{d}\tau\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau}\right)^* H = \mathrm{d}\tau Q^* H = 0$$

因此

$$Q^* H = 0 \tag{3.1.11}$$

定理3.1.2 如果由方程(3.1.10)确定的动力系统有 C^1 类截面 S，而函数

$$W(t, X) = Q^* F \tag{3.1.12}$$

对矢量 F 的分量是连续可微的，那么存在对矢量 X 分量为 C' 类的函数 $V(t, X)$，使得分解式(3.1.1)成立。此时，广义势场 G 用函数 $V(t, X)$ 按公式(3.1.2)确定 。场 H 满足条件(3.1.11)，并有形式

$$H(t, X) = PQ \tag{3.1.13}$$

其中 P 为反对称方阵，它的元素是参数 t 和矢量 X 分量的函数。这里作为 C^1 类截面 S 取为连续可微曲面，此曲面仅在独立变量的单值下当增大或减小时与方程(3.1.10)的积分曲线相交。

[证明] 要求场 $F(t, X)$ 按公式(3.1..1)分解，其中 H 满足(3.1.11)，面 G 按(3.1.2)确定。这时由(3.1.12)求得

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s \frac{\partial V}{\partial X_s} = -W \tag{3.1.14}$$

方程(3.1.14)有实的、连续可微的解 $V(t, X)$，它在截面 S 上趋近于给定函数 $V_0(t, X)$。

我们用函数 $V(t, X)$ 按公式(3.1.2)确定场 G。这时场 $H = F - G$ 必满足条件(3.1.11)，而因此需有形式(3.1.13)。

推论 如果方程组 (3.1.10) 有全局渐近稳定平衡位置 $X = 0$，那么场 $F(t, X)$ 总可表为形式(3.1.1)，其中 G 满足(3.1.2)，

而H满足(3.1.11)，如果仅函数(3.1.12)是可微的。这个结论由以下事实引出：当有全局渐近稳定性时，动力系统的截面必定存在。

3. 关于质点的运动方程 研究一绝对坐标系，假设此坐标系是笛卡儿右手系。如果给定某点M相对点O的矢径$\boldsymbol{r}(t)$，那么与此动点相关有一系列运动学和动力学特性。例如，动点M的质量m。我们认为矢量函数$\boldsymbol{r}(t)$在$t\in[t_0,t_1]$上给定，并且对时间t是实的、二阶连续可微的。矢径$\boldsymbol{r}(t)$的一阶导数称为点M的速度，二阶导数称为点的加速度。矢量函数$\boldsymbol{F}(t)=m\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$称为作用在点$M$上的力。量$\int_t^{t+\tau}\boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\,dt$称为力$\boldsymbol{F}$在时间$[t,t+\tau]$上的功。量$\frac{1}{2}m\dot{r}^2(t)$称为动点$M$的动能。

Newton在《自然哲学的数学原理》中为数学家提出如下问题：按给定的运动确定力。Newton所提问题的解在一般情形可用以下办法来实现。设给定运动族

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t,\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) \qquad (3.1.15)$$

其中$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$是表征动点初始位置和初始速度的常矢量。将关系(3.1.15)对t求导数，得到

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \qquad (3.1.16)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot{\boldsymbol{r}}(t,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \qquad (3.1.17)$$

为确定起见，假设由两个矢量方程(3.1.16)和(3.1.15)可找到矢量

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) \qquad (3.1.18)$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) \qquad (3.1.19)$$

这时利用(3.1.18)和(3.1.19)并由(3.1.17)中消去$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，我们求得

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F} \qquad (3.1.20)$$

这里 F 为作用在动点上的力

$$F=m\ddot{r}(t,a(t,r,\dot{r}),\ b(t,r,\dot{r}))=F(t,r,\dot{r})$$

当然，问题解的公式是 Newton 给出的。在每一个别情形，这个公式的存在是不很简单的事情。

现在设 $\rho(t)$ 是点 M 的任意运动。

定理3.1.3 如果对此运动动能在任何区间 $[t,t+\tau]$ 上的增量与力在同一区间上的功相合，那么必满足关系

$$m\ddot{\rho}(t)=F(t)$$

[证明] 设在运动 $\rho(t)$ 下动能在区间 $[t,t+\tau]$ 上的增量等于力在同一区间上的功。此时按动能和功的定义，有

$$\frac{1}{2}m\{\dot{\rho}^2(t+\tau)-\dot{\rho}^2(t)\}=\int_t^{t+\tau}F\cdot\dot{\rho}dt \qquad (3.1.21)$$

将(3.1.21)对 τ 求导，然后取 $\tau=0$，得到

$$m\dot{\rho}(t)\cdot\ddot{\rho}(t)=F(t)\cdot\dot{\rho}(t) \qquad (3.1.22)$$

因运动 $\rho(t)$ 是任意的，那么可认为速度矢量 $\dot{\rho}(t)$ 在固定 t 下可取任意值。例如，取

$$\dot{\rho}(t)=m\ddot{\rho}(t)-F(t) \qquad (3.1.23)$$

此时由(3.1.22)和(3.1.23)，我们得到

$$\{m\ddot{\rho}(t)-F(t)\}^2=0 \qquad (3.1.24)$$

关系(3.1.24)仅当

$$m\ddot{\rho}(t)=F(t)$$

时才成立。最后的关系是对其上定义运动 $\rho(t)$ 的区间 $[t_0,t_1]$ 的任意值 t 证明的。

附注. 如果运动 $\rho(t)$ 在某时刻 $\bar{t}\in[t_0,t_1]$ 满足条件 $\rho(\bar{t})=r(\bar{t})$ 及 $\dot{\rho}(\bar{t})=\dot{r}(\bar{t})$，那么必定有

$$\rho(t)\equiv r(t),\ t\in[t_0,t_1]$$

现在设 $F=F(t,r,\dot{r})$ 为在自变量的所有有限值下给定的、

连续的实矢量函数。我们将认为该矢量函数乃是引起点 M 运动的所有原因(力)的总合。研究微分方程组

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) \tag{3.1.25}$$

为确定起见，假设方程组(3.1.25)的右端在任意初始给定

$$t=t_0,\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0,\ \dot{\boldsymbol{r}}=\dot{\boldsymbol{r}}_0$$

下满足解的存在和唯一条件。此时方程组(3.1.25)有解

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t_0) \tag{3.1.26}$$

在运动(3.1.26)上计算方程组(3.1.25)的右端。此时得到完全确定的矢量函数 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$。如对该矢量函数应用定理 3.1.3，那么满足能量守恒律的任何运动 $\boldsymbol{\rho}(t)$，必定是

$$m\ddot{\boldsymbol{\rho}}=\boldsymbol{F}(t)$$

由附注得知，如果这样的运动在某时刻 $\bar{t}$ 与所研究的运动相重合

$$\boldsymbol{\rho}(\bar{t})=\boldsymbol{r}(\bar{t},\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t_0)\text{ 及 }\dot{\boldsymbol{\rho}}(\bar{t})=\dot{\boldsymbol{r}}(\bar{t},\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t_0)$$

那么必定有

$$\boldsymbol{\rho}(t)\equiv\boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t_0)$$

因此，如果在某任意时刻，例如在初始时刻为 $\boldsymbol{\rho}(t_0)=\boldsymbol{r}_0$，$\dot{\boldsymbol{\rho}}(t_0)=\dot{\boldsymbol{r}}_0$，那么满足能量守恒定律的质点任意运动与质点 M 的给定运动 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0,t_0)$ 相重合。质点在力场 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{r}})$ 中的运动自然地被确定，因此方程(3.1.25)需当作运动微分方程来研究。

函数$g(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$称为方程组(3.1.25)的第一积分，如果在由方程组(3.1.25)确定的每一运动中，它取常值，但本身不是常量。

说到等式

$$g(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})=0 \tag{3.1.27}$$

给出方程组(3.1.25)的特殊积分，如果方程组(3.1.25)在初始时刻满足等式

$$g(t_0,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0)=0$$

的任何运动在运动的全部时间都满足。这样的运动称为从属约

束。

现在研究当点 M 受到某些约束限制情形时方程组(3.1.25)右端的结构问题。用 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$表示不依赖于约束的力。约束对点$M$的作用通常用某个力$\boldsymbol{R}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$来量度，此力称为约束反力。作用在与约束适合的动点 M 上的全部力有形式

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})+\boldsymbol{R}(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$$

在此情形，方程(3.1.25)取形式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{R} \tag{3.1.28}$$

假设上述约束可解析地表为

$$g(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})=0 \tag{3.1.29}$$

将(3.1.29)对 t 求全导数并由(3.1.28)替代$\ddot{\boldsymbol{r}}$，我们求得

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{C}+\gamma=0 \tag{3.1.30}$$

其中$\boldsymbol{C}=\dfrac{\partial g}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}$。如果函数 g 不依赖于 $\dot{\boldsymbol{r}}$(完整约束情形)，那么$\boldsymbol{C}=\dfrac{\partial g}{\partial\boldsymbol{r}}$。设$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2$，$\boldsymbol{C}_3$是彼此正交的单位矢量，而$\boldsymbol{C}_1$与矢量$\boldsymbol{C}$同向。此时有

$$\boldsymbol{R}=\lambda_1\boldsymbol{C}_1+\lambda_2\boldsymbol{C}_2+\lambda_3\boldsymbol{C}_3 \tag{3.1.31}$$

由(3.1.30)得到

$$\lambda_1=-\frac{\gamma}{\|\boldsymbol{C}\|} \tag{3.1.32}$$

如果力$\boldsymbol{R}$满足条件(3.1.31)和(3.1.32)，那么函数 $g(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})$ 是方程组(3.1.28)的第一积分。因此，如果在某任意运动中 $g(t_0,\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0)=0$,那么在所有运动时间应有 $g(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}})=0$,即系统(3.1.28)的这样运动与约束(3.1.29)适合。力 $\boldsymbol{R}$ 的一般形式可以得到，如果认为量 λ_1 按下式确定

$$\lambda_1=-\frac{\gamma}{\|\boldsymbol{C}\|}+\lambda(t,\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}},g) \tag{3.1.33}$$

其中函数λ在 $g=0$ 下恒趋于零。

对方程组(3.1.28)，这时等式(3.1.29)将给出特殊积分，但是这里运动方程所涉及的一般性不影响所研究的运动，因为此时对满足关系(3.1.29)的变量 t，$\boldsymbol{r}$，$\dot{\boldsymbol{r}}$ 的值的集合，系统不改变。

将矢量 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 沿正交矢 $\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2$，$\boldsymbol{C}_3$ 分解，有

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\mu_1\boldsymbol{C}_1+\mu_2\boldsymbol{C}_2+\mu_3\boldsymbol{C}_3 \tag{3.1.34}$$

如果成立

$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=0$$

那么力 $\boldsymbol{R}$ 不作功，或 $\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{R}=0$，因此，约束反力不影响动点动能的变化。

4．关于质点系的运动方程 现在转向研究质点系 M_1，…，M_n 的运动方程。如果 m_i 是点的质量，$\boldsymbol{r}_i$ 是它的矢径，$\boldsymbol{F}_i$ 为主动力，$\boldsymbol{R}_i$ 为约束反力，那么每个质点可作为自由质点来研究，类似于上面可将运动方程组写成

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{3.1.35}$$

假设质点系所受约束表为形式

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(t,q_1,\cdots,q_k) \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{3.1.36}$$

其中 q_1，…，q_k 为确定点在空间中位置或者说确定质点系位形的广义坐标。量

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{r}_i^2$$

为质点系的动能。由(3.1.36)得知，系统动能是广义速度 $\dot{q}_1$…，$\dot{q}_k$ 的二次形。将方程组 (3.1.35) 的第 i 个点乘 $\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ 并从 1 至 n 对 i 求和，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad (j=1,\ \cdots,k) \tag{3.1.37}$$

其中 $Q_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)$ 为与广义坐标 q_j 相应的广义力。

方程(3.1.37)即为 Lagrange 第二类方程.

由定理 3.1.1 得知，方程组(3.1.37)的右边可表为形式

$$Q_j=\frac{\partial \overline{w}}{\partial \dot{q}_j}+\bar{R}_j \tag{3.1.38}$$

其中 $\overline{w}$ 和 $\bar{R}_j$ 为时间、矢量 $q=(q_1, \cdots, q_k)$ 和矢量 $\dot{q}=(\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k)$的函数。因此

$$\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\cdot\bar{R}_j=0 \tag{3.1.39}$$

由(3.1.39)得知，矢量 $\dot{q}$ 和 $\bar{R}=(\bar{R}_1, \cdots, \bar{R}_k)$彼此正交。如果矢量 $\bar{R}$ 表为形式

$$\bar{R}=\Gamma\dot{q} \tag{3.1.40}$$

则正交性条件 (3.1.39) 将成立，其中 Γ 为反对称矩阵，$\Gamma=-\Gamma^*$，它的元素一般说来是时间、矢量分量 q 和 $\dot{q}$ 的任意函数。

我们证明，满足条件(3.1.39)的任何矢量 $\bar{R}$ 必定有形式(3.1.40)。实际上，如果 $\bar{R}^s(s=1, \cdots, k)$是正交于 $\dot{q}$ 的某矢量，那么矢量 $\bar{R}=\sum_{s=1}^{k}\varphi_s\bar{R}^s$在标量函数的任意选取下也正交于 $\dot{q}$。我们证明，作为矢量 $\bar{R}^s(s=1, \cdots, k)$可选矩阵

$$\Delta=E\dot{q}^2-\dot{q}\dot{q}^* \tag{3.1.41}$$

的行，其中 E 为单位矩阵。因此在这些矢量之间必有$(k-1)$个是线性独立的。将等式(3.1.41)左乘 $\dot{q}^*$，得到

$$\dot{q}^*\Delta=\dot{q}^*\dot{q}^2-\dot{q}^2\dot{q}^*=0$$

因此，矩阵Δ的行与矢量 $\dot{q}$ 正交。现在证明，在它们中间必定存在$(k-1)$个线性独立的。假设存在矢量 α 与 $\dot{q}$ 正交，$\alpha^2\neq0$，使得同时与矩阵 Δ 的所有行正交。这时，用 α 右乘(3.1.41)，得

$$\Delta\alpha=\dot{q}^2\alpha=0$$

由此得出 α 为零矢量，因为假设 $\dot{q}^2$ 异于零。因此，每个与 $\dot{q}$ 正交的矢量必定为矩阵 Δ 的行的线性组合。换言之，如果 $\bar{R}$ 满足

(3.1.39)，那么必定有

$$\tilde{R}=\Delta\varphi \tag{3.1.42}$$

其中 $\varphi=(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_k)$为带任意分量的矢量。

容易看出，如果置

$$\Gamma=\varphi\dot{q}^*-E\dot{q}^*\varphi$$

则等式(3.1.42)就有形式(3.1.40)。由(3.1.40)和(3.1.42)知，方程组(3.1.37)的右端可写成两种相等的形式。

现在研究一特殊情形，即反对称矩阵 Γ 不依赖于广义速度的情形。这时矩阵 Γ 在任何情形中都可借助 k 个函数 $u_1,\ \cdots,\ u_k$ 表为形式

$$\Gamma=\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\partial v}{\partial q}\right\}-\left\{\frac{\partial v}{\partial q}\right\}^*\right] \tag{3.1.43}$$

其中

$$\frac{\partial v}{\partial q}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial q_k}\\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial u_k}{\partial q_k}\end{bmatrix}$$

实际上，如果函数 $u_1,\ \cdots,\ u_k$ 给定，那么(3.1.43)的右端是反对称矩阵，而因此公式(3.1.40)将给出与 $\dot{q}$ 正交的矢量。

我们来证明，相反的结论也对。即，如果给定反对称矩阵 Γ，那么函数 $u_1,\ \cdots,\ u_k$ 存在。由(3.1.43)对第一行将有方程组

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_s}-\frac{\partial u_s}{\partial q_1}=2a_{1s}\qquad(s=1,\ \cdots,\ k)$$

在此方程组中我们随便给出函数并按公式

$$u_s=c_s(t,q_2,q_3,\cdots,q_k)+\int_0^{q_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial q_s}-2a_{1s}\right)\mathrm{d}q_1$$

来确定函数 $u_s(s=2,\cdots,\ k)$。这里 $c_s(s=2,\cdots,k)$为不依赖于矢量 q 的第一个分量的任意函数。其次，使矩阵等式(3.1.43)的第

二行相等，我们可求到为确定这些函数的方程组。

类似的作法可用矩阵 Γ 的元素来确定未知函数 $u_1,\cdots,u_k$。当然，这样的确定是非单值的。

现在转向方程组(3.1.37)用动量表示的写法。为此，置

$$p_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j=1,\ \cdots,\ k) \qquad (3.1.44)$$

此时方程组(3.1.37)可写成形式

$$\dot{p}_j=\frac{\partial T}{\partial q_j}+Q_j \qquad (j=1,\cdots,k) \qquad (3.1.45)$$

由(3.1.44)得知，动量是广义速度的线性函数，反之亦对：广义速度是动量的线性函数。自然，这些线性函数的系数一般说来是时间和广义坐标的函数。此时(3.1.45)的右端是时间、广义坐标和动量的函数。因此，按定理3.1.1，(3.1.45)的右端可写成形式

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}+Q_j=\frac{\partial \overline{W}}{\partial p_j}+\overline{R}_j \qquad (3.1.46)$$

$$\overline{R}=\Gamma p$$

其中 $\overline{W}$，$\overline{R}_j$ 是时间以及矢量 $q=(q_1,\ \cdots,\ q_k)$ 和 $p=(p_1,\ \cdots,\ p_k)$的分量的函数；Γ 为任意反对称矩阵，其元素是时间和矢量 q 和 p 的分量的函数。

置$H=\sum\limits_{j=1}^{k}\dot{q}_jp_j$，可称为方程组(3.1.37)的Hamilton函数(与通常的定义稍有不同)。如果利用不等式(3.1.44)，那么函数H 可作为时间、矢量 p 和 q 分量的函数。直接计算得

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (j=1,\ \cdots,\ k) \qquad (3.1.47)$$

方程组(3.1.45)和(3.1.47)是偏微分方程

$$\frac{\partial p_j}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial p_j}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}=\frac{\partial W}{\partial p_j}+R_j \quad (j=1,\cdots,k) \quad (3.1.48)$$

的特征组。方程组(3.1.48)可由(3.1.45)和(3.1.47)得到，只要把动量 $p_j(j=1,\ \cdots,\ k)$ 当作广义坐标和时间的未知函数。

5. 关于稳定性问题 ЛЯПУНОВ提出稳定性的下述定义。

定义3.1.1 设 L_1，L_2，…，L_n 是任意给定的正数。如果在所有 L_s 下，无论它们怎样小，总能选取正数 E_1，E_2，…，E_k，E'_1，E'_2，…，E'_k，使得在满足条件

$$|\varepsilon_j|\leqslant E_j, \quad |\varepsilon_j'|\leqslant E_j' \quad (j=1,\ \cdots,\ k)$$

的所有实的 ε_j，ε_j' 下，在由 t_0 开始的所有 t 下，满足不等式

$$|\tilde{Q}_1-\bar{F}_1|<L_1,\ \cdots,\ |\tilde{Q}_n-\bar{F}_n|<L_n$$

那么对量 $\tilde{Q}_1$，…，$\tilde{Q}_n$ 的未扰动运动是稳定的，在相反的情形对这些量是不稳定的。

这里用 $\tilde{Q}$ 表记量 t，q_1，…，q_k，$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_k$ 的某函数，用$\bar{F}$表记由初条件 $t=t_0$，$q_j=q_{j0}$，$\dot{q}_j=\dot{q}_{j0}$ 所确定的、事先选取的未扰动运动 $q_j=q_j(t)$，$q_j=\dot{q}_j(t)$ 下的这些函数值。函数 $\tilde{Q}_j$ 在运动

$$\bar{q}_j=\bar{q}_j(t),\ \dot{\bar{q}}_j=\dot{\bar{q}}_j(t)$$

上计算，此运动为由初条件 $t=t_0$，$\bar{q}_j=\bar{q}_{j0}$，$\dot{\bar{q}}_j=\dot{\bar{q}}_{j0}$ 所确定的扰动运动，其中 $\varepsilon_j=\bar{q}_{j0}-q_{j0}$，$\varepsilon'_j=\dot{\bar{q}}_{j0}-\dot{q}_{j0}$。

如果函数 Q_j 与广义坐标和广义速度相合，即

$$\tilde{Q}_j=q_j, \quad \tilde{Q}_{j+k}=\dot{q}_j \quad (j=1,\ \cdots,\ k)$$

那么由对这些量的稳定性定义得到对广义坐标和广义速度的未扰动运动的稳定性定义。

我们首先研究这类稳定性。此时动能 T 是广义速度的二次形。二次形系数一般说来是广义坐标的函数。假设质点系在保守力场中运动。换言之，认为广义 Q_j 有势 $\Pi=\Pi(q_1,\ \cdots,\ q_k)$使

$$Q_j=\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\ (j=1,\ \cdots,\ k)$$

在此情形运动方程取形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \tag{3.1.49}$$

如果在 $q_j=q_{j0}(j=1,\ \cdots,\ k)$有

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}=0$$

就说质点系有平衡位置

$$q_j=q_{j0}\quad (j=1,\ \cdots,\ k),\ \dot{q}_j=0 \tag{3.1.50}$$

这意味着，如果用(3.1.50)替代未知函数，那么方程组(3.1.49)满足。与函数 Π 一起，引进势能 P

$$P=-\Pi+C$$

这里 C 是某常量，它常这样选：使在平衡位置上 $P=0$。

定理3.1.4 如果在平衡位置上势能有极小，那么受有稳定完整约束的、在保守力场中运动的质点系有稳定的未扰动运动(3.1.50)(Lagrange–Dirichlet)。

［证明］ 将方程组(3.1.49)的第 j 个方程乘以 $\dot{q}_j$ 并由 1 至k 对 j 求和，得到

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\dot{q}_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)+\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial P}{\partial q_j}=0$$

因约束是完整的、稳定的，T 是 $\dot{q}_j$ 的齐二次式，按齐次函数的 Euler 定理有

$$\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=2T$$

我们求得

那么平衡位置(3.1.58)对坐标是稳定的。

[证明] 将方程组(3.1.57)的第 j 个方程乘以 $\dot{q}_j$，并由1至 k 对 j 求和，应用齐次函数的Euler定理 $\sum_{j=1}^{k}\dot{q}_j\frac{\partial W^{(m)}}{\partial\dot{q}_j}=mW^{(m)}$，如前我们求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+P)=\sum_{m=2}^{\infty}mW^{(m)} \tag{3.1.59}$$

数 ε，δ 及 λ 的选取同定理3.1.4的证明。

因(3.1.59)的右端取非正值，那么在区域(3.1.53)中开始的任何运动在 $t\geqslant t_0$ 时满足条件 $T+P<\lambda$。如前面证明的，由此不等式得知，在所有 $t\geqslant t_0$ 时成立(3.1.54)。因此，平衡位置(3.1.58)对坐标是稳定的。[证毕]

现在研究受不稳定完整约束的质点系的运动。此时系统的动能为

$$T=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}$$

其中 $T^{(2)}$ 为广义速度的正定二次形，$T^{(1)}$ 为广义速度的线性形，$T^{(0)}$ 不依赖于广义速度。$T^{(2)}$ 和 $T^{(1)}$ 的系数以及量 $T^{(0)}$ 一般说来是变量 t，q_1，…，q_k 的函数。这样质点系的运动方程仍有形式(3.1.57)，但动能已不再是广义速度的二次形了。

定理3.1.6 如果

(1) 方程组(3.1.57)有平衡位置(3.1.58)；

(2) 存在一函数 $P=P(q_1,\cdots,q_k)$ 使得

$$-\frac{\partial P}{\partial q_j}=\frac{\partial W^{(1)}}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial T^{(0)}}{\partial q_j}\quad(j=1,\cdots,k)$$

(3) 函数 P 在平衡位置上有极小；

(4) 函数 $\sum_{m=2}^{\infty}mW^{(m)}-\frac{\partial T^{(2)}}{\partial t}$ 取非正值，

那么平衡位置(3.1.58)对坐标以及广义速度是稳定的。

的稳定性问题解的一般情形。实际上，在方程组(3.1.57)中作待求函数替换

$$q_j = q_j(t) + \xi_j$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(t) + \dot{\xi}_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ k) \qquad (3.1.64)$$

质点系的动能借助这样替换变为量$\dot{\xi}$的二次函数$\tilde{T}$

$$\tilde{T} = \tilde{T}^{(2)} + \tilde{T}^{(1)} + \tilde{T}^{(0)}$$

这里$\tilde{T}^{(2)}$为二次形，$\tilde{T}^{(1)}$为相对广义速度$\dot{\xi}_1,\cdots,\ \dot{\xi}_k$的线性形；$\tilde{T}^{(0)}$为质点系在未扰动运动(3.1.63)中的动能。广义力$\dfrac{\partial W}{\partial q_j}+R_j$的力场在替换(3.1.63)后也可表为形式

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{\xi}_j} + \tilde{R}_j \qquad (j=1,\ \cdots,k)$$

其中量$\tilde{R}_j$满足关系

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{\xi}_j \tilde{R}_j = 0$$

因此，运动方程(3.1.57)取形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\xi}_j} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{\xi}_j} + \tilde{R}_j \quad (j=1,\cdots,k)$$

(3.1.65)

方程组(3.1.65)有平衡位置

$$\xi_j = 0,\ \ \dot{\xi}_j = 0 \qquad (j=1,\ \cdots,\ k) \qquad (3.1.66)$$

我们说二次形$\tilde{T}^{(2)}$按$t\geqslant 0$及$\xi_1,\ \cdots,\ \xi_k$，$|\xi_i| < \bar{\varepsilon}$相对量$\dot{\xi}_1,\cdots,\ \dot{\xi}_k$为正定的，如果满足不等式

$$\tilde{T}^{(2)} > a\sum_{j=1}^{k} \dot{\xi}_j^2$$

其中 a 为正的常数。这一不等式在$t\geqslant 0$, $|\dot{\xi}_j|\leqslant\tilde{\varepsilon}$ 下成立，其中 $\tilde{\varepsilon}$ 为某正的常数。

在研究中我们引入广义势 $\Pi=\Pi(\xi_1,\cdots,\xi_k,t)$并认为函数 $\bar{P}=-\Pi$ 对 $t\geqslant 0$ 是正定的，即假设当 $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_k=0$ 时 $\bar{P}(\xi_1,\cdots,\xi_k,t)=0$，且存在函数 $P=P(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$，它在点 $\xi_1=\cdots=\xi_k=0$ 处有极小，$P(0,\cdots,0)=0$ 使得在 $|\xi_j|\leqslant\tilde{\varepsilon}$下，$\bar{P}(\xi_1,\cdots,\xi_k,t)\geqslant P(\xi_1,\cdots,\xi_k)$。

定理3.1.7 如果满足下列条件

(1) 存在一函数$\bar{P}$ 使得

$$-\frac{\partial\bar{P}}{\partial\xi_j}=\frac{\partial\widetilde{W}^{(1)}}{\partial\dot{\xi}_j}-\frac{\partial^2\bar{T}^{(1)}}{\partial\dot{\xi}_j\partial t}+\frac{\partial\bar{T}^{(0)}}{\partial\xi_j}\qquad(j=1,\cdots,k)$$

(2) 函数$\bar{P}$ 对 $t\geqslant 0$ 为均匀正定的，$\bar{T}^{(2)}$ 对 $t\geqslant 0$ 及 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 为均匀正定二次形；

(3) 函数

$$\sum_{m=2}^{\infty}mW^{(m)}-\frac{\partial\bar{T}^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{P}}{\partial t}$$

保持符号(不变号)，在充分小量$\xi_1,\cdots,\xi_k,\dot{\xi}_1,\cdots,\dot{\xi}_k$以及在所有 $t\geqslant 0$ 下保持非正号。

[证明] 我们固定数 t_0，选充分小的 ε 并置 $\lambda=\inf\limits_{t\geqslant t_0,\xi_j,\dot{\xi}_j}(\bar{T}^{(2)}+\bar{P})$。此时量 ξ_j 和 $\dot{\xi}_j$ $(j=1,\cdots,k)$处于立方体

$$|\xi_j|\leqslant\varepsilon,\ |\dot{\xi}_j|\leqslant\varepsilon\qquad(j=1,\cdots,k)\tag{3.1.67}$$

边界内，选数 δ 使得当 $t\geqslant t_0$ 以及

$$|\xi_j|<\delta,\ |\dot{\xi}_j|<\delta,\ \ \delta<\varepsilon\tag{3.1.68}$$

有 $$\bar{T}^{(2)}+\bar{P}<\lambda$$

我们来证明，在区域(3.1.68)内开始的任何运动，在所有运动时间内处于立方体(3.1.67)内部。实际上，在任何运动中函数 $T^{(2)}+P$ 不增大。因此在所有运动时间，当 $t\geqslant t_0$ 时有

$$T^{(2)}+P<\lambda \qquad (3.1.69)$$

如果假设运动超出立方体(3.1.67)的界限，那么存在轨道穿过立方体边界的时刻。此时必定有 $(T^{(2)}+P)\geqslant\lambda$，而这与不等式(3.1.69)相矛盾，因此在运动所有时间扰动轨道保持在立方体(3.1.67)内部。即当 $t\geqslant t_0$，满足不等式 $|\xi_j|<\varepsilon$，$|\dot{\xi}_j|<\varepsilon$ $(j=1, \cdots, k)$。

如果在Ляпунов给出的稳定性定义中作某些改变，那么可得到更广泛的稳定性概念，包括现时存在的各类稳定性。

定义3.1.2 设 L_1，L_2，…，L_n 是任意正数。如果在所有 L_s 下，无论它们多么小，总可以选择正数 E_1，E_2，…，E_n，使得在满足条件

$$|\rho_j|\leqslant E_j \qquad (j=1, \cdots, N)$$

的所有实数 ρ_j 下，以及过 t_0 的所有 t 满足不等式

$$I_1<L_1, \cdots, I_n<L_n$$

那么未扰动运动相对量 ρ_1，…，ρ_N，I_1，…，I_N 是稳定的，在相反情形对这些量是不稳定的。这里 ρ_1，…，ρ_N 是 $4k$ 个变量 q_j，$\dot{q}_j$，q_{j0}，$\dot{q}_{j0}$ $(j=1,\cdots,k)$ 的函数，$I_1,\cdots,I_n$ 是函数或在以下两个运动上计算的泛函：一个是相应于初始条件 q_{j0} 和 $\dot{q}_{j0}$ 的未扰动运动 $q_j(t)$，$\dot{q}_j(t)$；一个是相应于初始给定 q_{j0} 和 $\dot{q}_{j0}$ 的扰动运动 $q_j(t)$，$\dot{q}_j(t)$。因此，假设函数 ρ_1，…，ρ_N 和泛函 I_1，…，I_n 取非负值。

以后这个Ляпунов稳定性推广概念将用于研究控制过程的稳定性分析。

6. 关于动力学控制 假设给定两个质点系，实现协同运动。一个质点系是载体或控制体，另一质点系是被载体或被控制

体。假设，第一个质点系用广义坐标 $q_1,\cdots,q_k$ 确定，第二个质点系用 s_1，…，s_m 确定。如果 $\boldsymbol{r}_i$ 为此系统某任意点的矢径，那么可认为

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(t,\ q_1,\ \cdots,\ q_k,\ s_1,\ \cdots,\ s_m)$$
$$(i=1,\ \cdots,\ n) \tag{3.1.70}$$

这里 n 为两系统质点的数目。

如果 m_i 是第 i 个点的质量，那么它的运动方程是

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i \qquad (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{3.1.71}$$

动能 $T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$ 是广义速度 $\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_k$，$\dot{s}_1$，…，$\dot{s}_m$ 的二次形

$$T=\tau^{(2)}+\beta^{(2)}+\sigma^{(2)}+\tau^{(1)}+\sigma^{(1)}+T^{(0)}$$

其中 $\tau^{(2)}$ 为量 $\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_k$ 的二次形，$\tau^{(1)}$ 为这些量的线性形，$\sigma^{(2)}$ 是量 $\dot{s}_1$，…，$\dot{s}_m$ 的二次形，$\sigma^{(1)}$ 是这些量的线性形，$\beta^{(2)}$ 为广义速度的双线性形，$T^{(0)}$ 为不含广义速度的项。如果(3.1.71)逐项乘以 $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ 并由 1 至 n 对 i 求和，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tau^{(2)}}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial\tau^{(2)}}{\partial q_j}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\beta^{(2)}}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial\beta^{(2)}}{\partial q_j}\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tau^{(1)}}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial\tau^{(1)}}{\partial q_j}-\frac{\partial(\sigma^{(2)}+\sigma^{(1)}+T^{(0)})}{\partial q_j}\\&=Q_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ k)\end{aligned} \tag{3.1.72}$$

将(3.1.71)点乘 $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial s_l}$ 并由 1 至 n 对 i 求和，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\sigma^{(2)}}{\partial\dot{s}_l}-\frac{\partial\sigma^{(2)}}{\partial s_l}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\beta^{(2)}}{\partial\dot{s}_l}-\frac{\partial\beta^{(2)}}{\partial s_l}\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\sigma^{(1)}}{\partial\dot{s}_l}-\frac{\partial\sigma^{(1)}}{\partial s_l}-\frac{\partial(\tau^{(2)}+\tau^{(1)}+T^{(0)})}{\partial s_l}\end{aligned}$$

$$=U_l \tag{3.1.73}$$

$$(l=1,\ \cdots,\ m)$$

与方程组(3.1.72)、(3.1.73)相关提出下述问题：首先需要找到控制作用 $u_1,\ \cdots,\ u_m$，在此控制作用下实现给定的程序运动，这些运动具有某些性质。其次，需如此选取控制作用，使得上述程序运动在广义上是稳定的。第三，在确保所指问题解的控制之间，需要选取在某种意义下的最优控制。

§3.2 刚体转动运动的控制

在这一节里我们研究刚体转动运动的控制问题。由这种研究结果可找到控制力矩的形式，在此力矩作用下或者使转动刚体的方位在给定方向上，或者与刚体固联的轴按给定程序扫描。同时证明，上述力矩可借助于以某种方式与控制载体相联的被载体相对运动中引起的 Coriolis 力和相对惯性力来组成。

1. 刚体定点转动的控制 首先研究绕固定点转动的刚体，其转动方程为 Euler 动力学方程

$$\boldsymbol{\theta}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{M} \tag{3.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为角速度矢量，$\boldsymbol{\theta}$ 为惯量张量，$\boldsymbol{M}$ 为作用在物体上的力矩。

设给出两个单位矢量 $\boldsymbol{s}$ 及 $\boldsymbol{r}$。矢量 $\boldsymbol{s}$ 在绝对空间中是不变的，矢量 $\boldsymbol{r}$ 在刚体中是不变的。

刚体在给定方向定方位的问题在于寻求力矩 $\boldsymbol{M}$ 使得满足条件 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{s}$。在研究物理摆在均匀重力场和悬挂点处摩擦力的作用下的运动就提出这样的问题。众所周知，这两个因素的作用一般说来使摆实现衰减振动。因此，由悬挂点到摆的惯性中心的方向将与重力场的方向相重合。如果前一方向用 $\vec{r}$ 给出，后一方向用 $\boldsymbol{s}$ 给出，那么在所研究的物理摆上将作用力矩 $k\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}$，其中 k 为某正常数。由这种研究可引出力矩的形式，借助此力矩可解上述提出的定方位问题。即，引出

$$M=\mu+kr\times s \tag{3.2.2}$$

其中 μ 为某力矩，它表征如同悬挂点的摩擦力矩。为确定起见，先假定

$$M=-\omega+kr\times s \tag{3.2.3}$$

对于刚体来说，矢量 s 完成以角速度 $-\omega$ 的转动运动，因此在与刚体固联的坐标系中有

$$\dot{s}=-\omega\times s \tag{3.2.4}$$

定理3.2.1 方程组(3.2.1)、(3.2.4)在控制(3.2.3)下的平衡位置 $s=r$，$\omega=0$，对任意选取的 $k>0$，是Ляпунов 渐近稳定的。方程组(3.2.1)、(3.2.2)异于平衡位置 $r=-s$，$\omega=0$ 的任何运动将具有如下性质：当 $t\to+\infty$，在适当选取的 $k>0$ 下，$\omega\to 0$，$r\to s$。

［证明］ 我们拟定证明这个定理的基本步骤。

1°借助函数

$$V=\frac{1}{2}[\omega\cdot\theta\cdot\omega+k(s-r)^2]$$

可建立平衡位置 $r=s$，$\omega=0$ 的Ляпунов稳定性事实，在控制(3.2.3)下据方程组(3.2.1)、(3.2.4)计算函数 V 的全导数，有

$$\begin{aligned}
\dot{V}&=\frac{1}{2}\dot{\omega}\cdot\theta\cdot\omega+\frac{1}{2}\omega\cdot\theta\cdot\dot{\omega}\\
&\quad+k(s-r)\cdot(\dot{s}-\dot{r})\\
&=\omega\cdot\theta\cdot\dot{\omega}+k(s-r)\cdot(\dot{s}-\dot{r})\\
&=\omega\cdot[-\omega\times\theta\cdot\omega-\omega+kr\times s]\\
&\quad+k(s-r)\cdot(-\omega\times s)\\
&=-\omega\cdot\omega=-\omega^2
\end{aligned}$$

2°由函数 V 的性质得知，在任何运动中在任意 $k>0$ 下，当 $t\to\infty$ 时，有 $\omega\to 0$。

3°证明当 $t\to\infty$ 时有 $r\to s$ 或 $r\to -s$。实际上，按方程(3.2.1)

求$(r\times s)\cdot\theta\cdot\omega$的导数并利用(3.2.3)、(3.2.4)，有

$$
\begin{aligned}
[(r\times s)\cdot\theta\cdot\omega]^{\cdot}&=(r\times s)^{\cdot}\cdot(\theta\cdot\omega)\\
&\quad+(r\times s)\cdot(\theta\cdot\dot{\omega})\\
&=[r\times(-\omega\times s)]\cdot(\theta\cdot\omega)\\
&\quad+(r\times s)\cdot[-\omega\times\theta\cdot\omega-\omega+kr\times s]
\end{aligned}
$$

由$t\to\infty$，$\omega\to 0$，得

$$0=(r\times s)\cdot k(r\times s)$$

即$r\times s\to 0$。因此，或者$r\to s$，或者$r\to -s$。

4°由平衡位置$r=s$，$\omega=0$的Ляпунов稳定性以及性质(2)、(3)得知，在任何$k>0$下当$t\to\infty$时有$r\to s$，$\omega\to 0$。

5°现在证明，任何异于方程组(3.2.1)、(3.2.4)平衡位置$r=-s$，$\omega=0$的运动，在适当选取的正常数k下将趋于渐近稳定的平衡位置。实际上，我们如此选k，使得在运动开始时刻$V_0\neq 2k$，其中V_0为$t=0$时的V值。此时，随时间增大，有$2k-V>2k-V_0$。由(2)(3)有$\omega\to 0$，$r\times s\to 0$。如果设$r\to -s$，那么当$t\to\infty$时将有$V\to 2k$，而据上面假设这是不可能的。因此，在这样选取的k下当$t\to\infty$时必有$\omega\to 0$，$r\to s$。

注1.我们研究方程组(3.2.1)、(3.2.4)在控制(3.2.2)下的运动。如果函数$W=\vec{\omega}\cdot\vec{\mu}$对矢量$\vec{\omega}$的分量是负定的，并且当$\vec{\omega}\neq 0$时取负值，那么类似于定理3.2.1的结论保持。

注2.设在所研究刚体上除控制力矩外还作用力矩$\vec{M}_0$，此时方程组(3.2.1)取形式

$$\theta\cdot\dot{\vec{\omega}}+\vec{\omega}\times\theta\cdot\vec{\omega}=\vec{M}+\vec{M}_0$$

如果控制力矩由(3.2.2)确定并满足注1的条件，那么在常干扰作用下稳定性成立。亦即，对任何$\varepsilon>0$及$\delta>0$，对不同于平衡位置$\vec{\omega}=0$，$\vec{r}=-\vec{s}$的任何运动，可以找到$k>0$及$\gamma>0$，使得当$t\geq T$时有$|\vec{\omega}|<\varepsilon$，$|\vec{s}-\vec{r}|<\delta$，如果在运动全部时间$t\geq 0$有$|\vec{M}_0|<\gamma$的话。这个结论的证明可按定理3.2.1中类似的步骤来实现。

现在给定单位矢量$s_0(t)$，以角速度$\omega_0(t)$在绝对空间中转动。因此，对于所研究刚体，该矢量将以角速度$\omega_0-\omega$转动，于是在与刚体固联的坐标系中有

$$\dot{s}_0=(\omega_0-\omega)\times s_0 \tag{3.2.5}$$

在方程组(3.2.1)中控制力矩应这样选取：使得 $r\to s_0, \omega\to\omega_0$，其中 r 如上所指为与刚体固联的单位矢量。

设

$$M=\mu_1+\theta\cdot\dot{\omega}_0+\omega_0\times\theta\cdot\omega+kr\times s_0 \tag{3.2.6}$$

并取

$$\mu_1=-(\omega-\omega_0) \tag{3.2.7}$$

定理3.2.2 方程组(3.2.1)、(3.2.5)的动力平衡位置 $r=s_0$，$\omega=\omega_0$ 对任何 $k>0$ 将是Ляпунов渐近稳定的；进而，对于任何不与平衡位置 $r=-s_0$，$\omega=\omega_0$ 相重合的运动，可指出这样的 $k>0$ 使得当 $t\to\infty$ 时有 $s\to s_0$，$\omega\to\omega_0$。

注3. 研究方程组(3.2.1)、(3.2.5)在控制(3.2.6)下的运动。如果函数 $W_1=(\vec{\omega}-\vec{\omega}_0)\cdot\vec{\mu}_1$ 对矢量 $\vec{\omega}-\vec{\omega}_0$ 的分量是负定的且当 $\vec{\omega}\neq\vec{\omega}_0$ 时取负值，那么类似于定理3.2.2的结论是对的。

注4. 在解定理3.2.1的方位问题时，控制力矩按不依赖于质量在刚体中的分布来选取。在研究给定程序扫描问题时，控制力矩是依赖于质量在刚体中分布的。这是在所研究情形中的必要条件。

注5. 如果在方程(3.2.1)中还作用某力矩 $\vec{M}_0$，那么在注3中的条件满足时，动力平衡位置 $\vec{S}_0$，$\vec{\omega}_0$ 在常干扰下是稳定的。

现在假设，需要如此定位刚体：使得 $\vec{r}=s$ 且此位置转动被镇定。

我们明确规定单位矢 $\vec{r}$ 在刚体中的位置。即在解此问题时认为 r 沿惯性主轴之一指向，或在动力对称刚体情形 r 或者在对称轴上或者在垂直于该轴的平面上。

定理3.2.3 方程组(3.2.1)、(3.2.4)在控制(3.2.2)下，其中 $\mu=-[\omega-s(\omega\cdot s)]$，具有一族平衡位置 $r=\pm s$，$\omega=\lambda s$，其中 λ 为实参数。每个平衡位置 $r=s$，$\omega=\lambda s$ 为 Ляпунов有条件地渐近稳定的。方程组(3.2.1)、(3.2.4)在这样的控制下不与平衡位置 $r=-s$，$\omega=\lambda s$ 相重合的任何运动，在适当选取 k 下将趋于有条件地渐近稳定平衡位置之一。

2. 转动运动控制的相对运动动力学 现在转向研究对转动

运动控制的相对运动动力学。

设刚体 T_0 带动动力对称刚体 T_j 的系统。每个刚体都与 T_0 联结，使仅能绕与刚体 T_0 固联的轴 $\boldsymbol{I}_j$ 转动。并假设这些刚体的质心在其转轴上。此时刚体系统的质心相对刚体 T_0 有不变的位置。假设刚体 T_0 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕固定点转动，此固定点与刚体系质心相重合。此时运动方程组(如同 §1.8 中带旋转飞轮的刚体)为：

刚体系统转动方程

$$\theta\cdot\dot{\omega}+\omega\times\theta\cdot\omega+\sum_j C_j(\boldsymbol{I}_j\ddot{\varphi}_j+\omega\times\boldsymbol{I}_j\dot{\varphi}_j)=\boldsymbol{M}_0 \tag{3.2.8}$$

被载体转动方程

$$C_j[\ddot{\varphi}_j+\boldsymbol{I}_j\cdot\dot{\omega}]=q_j\quad(j=1,\ \cdots,\ l)$$

其中 l 为被载刚体数目。

在方程组(3.2.8)中 θ 是刚体系的惯量张量。当刚体 T_j 固定时，C_j 为刚体 T_j 的轴惯性矩，φ_j 是刚体 T_j 绕轴 $\boldsymbol{I}_j$ 的转角，$\boldsymbol{M}_0$ 为某力矩，q_j 为作用在刚体 T_j 上的力矩在转轴 $\boldsymbol{I}_j$ 上的投影。同上面一样，设 $\boldsymbol{s}$ 为在绝对空间中不变的矢量，而 $\boldsymbol{r}$ 为与刚体 T_0 固联的矢量。要求选取 $q_j(j=1,\ \cdots,\ l)$ 使得 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{s}$。用 $\boldsymbol{Q}$ 表记矢量

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{j=1}^{l}q_j\boldsymbol{I}_j$$

假设矩阵 $D=\theta-\sum_{j=1}^{l}C_jI_jI_j^*$ 非奇异。这里用 I_j^* 表记对 I_j 的转置矢量。置

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{M}_0-\omega\times\theta\cdot\omega-\sum_{j=1}^{l}C_j\omega\times\boldsymbol{I}_j\dot{\varphi}$$

进而认为，矢量 r 沿刚体系某惯性主轴方向，此时刚体 T_0 被控制使得 $r \to s$，而刚体 T_0 在这样的方位下稳定运动。

定理3.2.6 方程组(3.2.8)、(3.2.10)在控制(3.2.9)下，其中

$$M = -[\omega - s(\omega \cdot s)] + kr \times s$$

将有平衡位置

$$r = s, \quad \omega = \lambda s, \quad \varphi_j = \text{const}$$

每个这样的平衡位置相对变量 r 和 ω 将是有条件地渐近稳定的：

$$r \to s, \quad \omega \to \lambda s$$

因此，每个不与 $r = -s$，$\omega = \lambda s$，$\varphi_j = \text{const}$ 相重合的运动，在适当选取 $k > 0$ 下将具有性质：当 $t \to \infty$ 时，$r \to s$，$\omega \to \lambda s$。因此，参数 λ 的值相应于每个这样的运动。

§3.3 刚体系统的控制

1. 问题的提出 本节研究用自动机(工作机)控制问题，从力学观点看来自动机是彼此相联的刚体系统。指出控制结构，用以解自动机运动的协调与镇定问题。

我们将认为，自动机以彼此相联的刚体系统形式给出。设 T_0 为此系统的某个刚体，另外一些刚体 T_1，T_2，…，T_n 与其相联，并且 T_k 可自由地绕点 O_k 转动，该点固定在刚体 T_{k-1} 上或者在刚体 T_k 上($k=1$，…，n)。与 T_0 相联的这种刚体链可以有好几个，它们可以分叉而构成树形结构。

自动机运动的协调和镇定问题用下述方法建立。设在每个刚体上给定正交基。例如，单位矢 r_k 不变地与刚体 T_k 相联。设在绝对空间中给定正交基，与 r_k 相应的为 s_k。

要求建立控制力矩，此力矩作用在系统之刚体上使得当 $t \to \infty$ 时，$r_k \to s_k$，并使此运动为 Ляпунов 意义下稳定的。

2. 问题的解决 设 v_k 为点 O_k 的绝对速度，ω_k 为刚体 T_k 的绝对角速度。此时运动方程有形式

$$\theta_k\cdot\dot{\omega}_k+\omega_k\times\theta_k\cdot\omega_k+\mu_k\rho_k\times(\dot{v}_k+\omega_k\times v_k)$$
$$=M_k \tag{3.3.1}$$
$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$
$$\mu_k\{\dot{v}_k+\omega_k\times v_k+\dot{\omega}_k\times\rho_k+\omega_k\times(\omega_k\times\rho_k)\}=F_k$$
$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n) \tag{3.3.2}$$

其中 μ_k 和 θ_k 分别为刚体 T_k 的质量和对点 O_k 的惯量张量；ρ_k 为刚体 T_k 的质心对点 O_k 的矢径；F_k 为力的主矩；M_k 为作用在 T_k 上的力对点 O_k 的矩。求导数是在与刚体 T_k 相联的坐标系中进行的。单位矢 s_k 相对刚体 T_k 以角速度 $-\omega_k$ 转动，由此有

$$\dot{s}_k=-\omega_k\times s_k \tag{3.3.3}$$

对于自动机中的其余链也可写出类似的方程。

定理3.3.1 设

$$M_k=\mu_k\rho_k\times(\dot{v}_k+\omega_k\times v_k)-\omega_k+l_kr_k\times s_k$$
$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n) \tag{3.3.4}$$

此时方程组(3.3.1)—(3.3.3)在条件(3.3.4)下将有积分流形 $r_k=\pm s_k$，$\omega_k=0$，$k=0$，1，…，n，并且，如果运动不处于这些流形上，那么必有在充分大的系数 l_k 下，当 $t\to\infty$ 时，$s_k\to r_k$，$\omega_k\to 0$，而流形 $r_k=s_k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$，$\omega_k=0$ 对变量 ω_k，s_k 为Ляпунов渐近稳定的。

现在设定正交基 s_k 在空间中改变自己的位置。为确定起见，认为正交基 s_k 为以角速度 λ_k 在绝对空间中转动的某坐标系的单位矢。这时 s_k 相对刚体 T_k 以角速度$(\lambda_k-\omega_k)$转动，而因此有

$$\dot{s}_k=(\lambda_k-\omega_k)\times s_k \tag{3.3.5}$$

定理3.3.2 设

$$M_k=\mu_k\rho_k\times(\dot{v}_k+\omega_k\times v_k)-(\omega_k-\lambda_k)+\theta_k\cdot\dot{\lambda}_k$$
$$+\lambda_k\times\theta_k\cdot\omega_k+l_kr_k\times s_k \tag{3.3.6}$$

此时在方程组(3.3.1)、(3.3.2)、(3.3.5)中在控制(3.3.6)下，

是一函数，需要对此函数的衰减找到最佳控制。由(3.3.8)对(3.3.10)求导，我们有

$$\frac{dV}{dt}=pM_x+qM_y+rM_z$$

由此得知，最佳控制由以下公式给出

$$M_x=-\frac{\mu p}{|\omega|},\quad M_y=-\frac{\mu q}{|\omega|},\quad M_z=-\frac{\mu r}{|\omega|} \tag{3.3.11}$$

其中 $|\omega|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$。

由此得知，在控制(3.3.11)下，转动刚体的动能以最大可能方式减小。

我们来解释系统(3.3.8)在控制(3.3.11)下的运动性状。为此，据(3.3.8)在控制(3.3.11)下求函数的全导数，我们有

$$\frac{dV}{dt}=-\mu|\omega|$$

置$V=\rho^2/2$，由此得

$$\frac{d\rho}{dt}=-\frac{\mu|\omega|}{\rho} \tag{3.3.12}$$

我们估计(3.3.12)右边的上、下限。这时有

$$-\frac{\mu}{\sqrt{A}}\leqslant\frac{d\rho}{dt}\leqslant-\frac{\mu}{\sqrt{C}} \tag{3.3.13}$$

这里假定惯性矩满足关系

$$A\leqslant B\leqslant C$$

注意，不等式(3.3.13)在这样意义下是准确的：等号(无论右边还是左边)对某些运动一定实现。积分不等式(3.3.18)，我们得到

$$\rho_0-t\frac{\mu}{\sqrt{A}}\leqslant\rho\leqslant\rho_0-t\frac{\mu}{\sqrt{C}} \tag{3.3.14}$$

设 τ_0 为转动运动终了时间，此时由不等式(3.3.14)可确定

$$\tau_0 \in \left[\frac{\rho_0}{\mu}\sqrt{A},\ \frac{\rho_0}{\mu}\sqrt{C}\right] \tag{3.3.15}$$

定理3.3.3 控制(3.3.11)相对于动能衰减是最佳控制。在此控制下，转动运动被限制在区间 $t\in[0,\ \tau_0]$，而后在 $t=\tau_0$ 时完全消失，而 τ_0 值用关系(3.3.15)估计。

注：在确定控制(3.3.11)时，利用角速度在关联轴上的投影。

这些投影的确定仅在以下情形是可能的：当在组成传感器时相对上述轴有角速度的传递。

我们分出没有上述传感器的情形。但已知绝对空间中的某些矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{H}$，并且有可测量它在关联轴上投影的仪器。例如，矢量 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{H}$ 可为沿某些不动天体的正交基。

设 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H}$，这时绝对轴在关联轴中的方向余弦 a_{ij} 由下式确定：

$$c_{ij}=\frac{1}{|\boldsymbol{S}|^2|\boldsymbol{H}|^2(1-a^2)}\{H^2\sigma'_i\sigma_j + S^2(1-a^2)h'_i h_j + n'_i n_j\} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

其中

$$\sigma=\boldsymbol{S}-|\boldsymbol{S}|a\frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|},\quad a=\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{S}||\boldsymbol{H}|}$$

“一撇”表示在关联轴系中矢量的投影，不带“一撇”的表示在绝对坐标系中的投影，使得不带“一撇”的坐标事先已知，而带“一撇”的坐标在关联系运动过程中得以测量。

绝对轴系相对关联坐标系的正交基将以角速度 $-\boldsymbol{\omega}$ 转动，因此有

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{a}_1}{dt}&=-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}_1\\ \frac{d\boldsymbol{a}_2}{dt}&=-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}_2\\ \frac{d\boldsymbol{a}_2}{dt}&=-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}_3\end{aligned}\right\} \tag{3.3.16}$$

将(3.3.16)分别左矢乘矢量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$，并将所得结果迭加，我们得到

$$\boldsymbol{a}_1\times\dot{\boldsymbol{a}}_1+\boldsymbol{a}_2\times\dot{\boldsymbol{a}}_2+\boldsymbol{a}_3\times\dot{\boldsymbol{a}}_3=-[\boldsymbol{a}_1\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}_1)+\boldsymbol{a}_2\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{a}_3\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}_3)] \qquad (3.3.17)$$

应用矢量分析公式于(3.3.17)并注意到

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{a}_1)+\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{a}_3(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{a}_3)$$

我们得到

$$\boldsymbol{a}_1\times\dot{\boldsymbol{a}}_1+\boldsymbol{a}_2\times\dot{\boldsymbol{a}}_2+\boldsymbol{a}_3\times\dot{\boldsymbol{a}}_3=-2\boldsymbol{\omega} \qquad (3.3.18)$$

由此得知，最佳控制(3.3.11)在矢量形式下可表为

$$\boldsymbol{M}=\frac{\nu(\boldsymbol{a}_1\times\dot{\boldsymbol{a}}_1+\boldsymbol{a}_2\times\dot{\boldsymbol{a}}_2+\boldsymbol{a}_3\times\dot{\boldsymbol{a}}_3)}{|\boldsymbol{a}_1\times\dot{\boldsymbol{a}}_1+\boldsymbol{a}_2\times\dot{\boldsymbol{a}}_2+\boldsymbol{a}_3\times\dot{\boldsymbol{a}}_3|} \qquad (3.3.19)$$

将用矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 表达的绝对轴方向余弦的表达式代入(3.3.19)中，我们便得到对动能衰减的最佳控制，此控制用位置控制的两矢量系的基本参数表示。

现在研究控制力矩有另外限制的情形，即认为

$$|M_x|\leqslant\nu,\quad |M_y|\leqslant\nu,\quad |M_z|\leqslant\nu \qquad (3.3.20)$$

然后在控制(3.3.20)之中找到对动能衰减的最佳控制。由公式

$$\frac{dV}{dt}=pM_x+qM_y+rM_z$$

我们求得最佳控制有形式

$$M_x=-\nu\,\mathrm{sgn}\,p,\quad M_y=-\nu\,\mathrm{sgn}\,q,\quad M_z=-\nu\,\mathrm{sgn}\,r \qquad (3.3.21)$$

我们研究方程组(3.3.8)在控制(3.3.21)下的性状。为此，据(3.3.8)在此控制下计算动能的全导数，我们得到

$$\frac{dV}{dt}=-\nu(|p|+|q|+|r|) \qquad (3.3.22)$$

进而有

$$\frac{d\rho}{dt}=-\frac{\nu(|p|+|q|+|r|)}{\rho} \qquad (3.3.23)$$

我们来估计(3.3.23)的右边。容易看出

$$|\omega|\leqslant|p|+|q|+|r|\leqslant|\omega|\sqrt{3}$$

另一方面，有

$$|\omega|\sqrt{A}\leqslant\rho\leqslant|\omega|\sqrt{C}$$

因此，由(3.3.23)得到不等式

$$-\frac{\nu\sqrt{3}}{\sqrt{A}}\leqslant\dot{\rho}\leqslant-\frac{\nu}{\sqrt{C}} \qquad (3.3.24)$$

积分此不等式，有

$$\rho_0-\frac{t\nu\sqrt{3}}{\sqrt{A}}\leqslant\rho\leqslant\rho_0-\frac{t\nu}{\sqrt{C}}$$

设 $\hat{\tau}_0$ 为转动终了时间，此时由上述不等式得知

$$\hat{\tau}_0\in\left[\frac{\rho_0\sqrt{A}}{\nu\sqrt{3}},\ \frac{\rho_0\sqrt{C}}{\nu}\right] \qquad (3.3.25)$$

定理3.3.4 如果控制力矩有限制(3.3.20)，那么使动能衰减的最佳控制由公式(3.3.21)确定。在此控制下转动运动衰减，而后在 $t=\hat{\tau}_0$ 时完全消失，并且时间 $\hat{\tau}_0$ 满足关系(3.3.25)。

注：控制(3.3.21)在刚体中质量任意分布时都使转动运动消失。换言之，这种控制，正如定理3.3.3中提出的那样，使系统动能以最大可能方式消失而不依赖于刚体的惯量张量。但是动能完全消失的时间依赖于主惯性矩和动能的初始值。控制(3.3.21)属于所谓继电器控制类。在此引出的公式中，它依赖于角速度在关联轴上的投影。但是，如上所述，这些控制可用另外一些可测量的量，例如矢量S和H来表示。

偏航角、俯仰角和倾角由下式确定

$$\psi=\arccos\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{13}^2}}=\arccos\frac{a_{11}}{\sqrt{1-a_{12}^2}}$$

$$\theta = \text{arc tg}\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{13}^2}} = \text{arc tg}\frac{a_{12}}{\sqrt{1-a_{12}^2}}$$

$$\gamma = \text{arc cos}\frac{a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{13}^2}} = \text{arc cos}\frac{a_{22}}{\sqrt{1-a_{12}^2}}$$

$$= \text{arc cos}\frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2+a_{32}^2}}$$

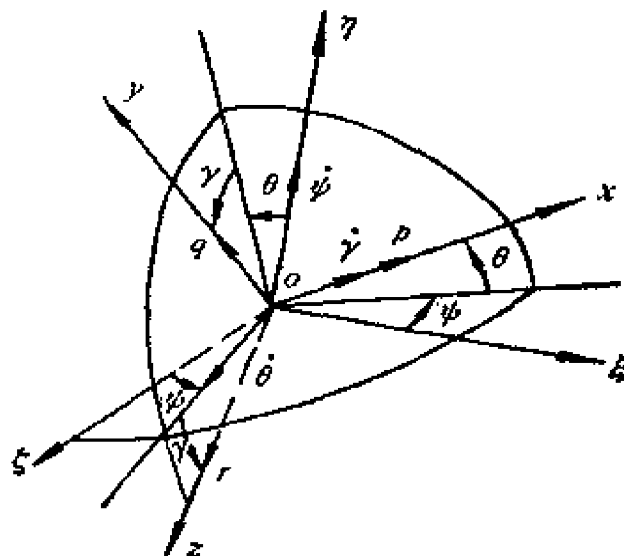


图3-1

沿偏航角、俯仰角和倾角的角速度用角速度在关联轴上的投影表示为(图3-1)

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos\theta}(q\cos\gamma - r\sin\gamma)$$

$$\dot{\theta} = r\cos\gamma + q\sin\gamma$$

$$\dot{\gamma} = p - \text{tg}\theta(q\cos\gamma - r\sin\gamma)$$

由此及上述公式，控制(3.3.21)可写成形式

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\nu\text{Sgn}(\dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\theta) \\ M_y &= -\nu\text{Sgn}(\dot{\theta}\sin\gamma + \dot{\psi}\cos\theta\cos\gamma) \\ M_z &= -\nu\text{Sgn}(\dot{\theta}\cos\gamma - \dot{\psi}\cos\theta\sin\gamma) \end{aligned}\right\} \quad (3.3.26)$$

$$\tau=\frac{\rho_0}{\mu}\sqrt{C}$$

由此得知，它与对动能衰减来说转动运动的最佳衰减时间的上限值相重合。

定理3.3.5 如果方程组(3.3.8)中的控制力矩由公式(3.3.27)确定，那么转动运动在时间 $\tau=(\rho_0/\mu)\sqrt{C}$ 内消失，其中 $\rho_0=\sqrt{Ap^2+Bq_0^2+Cr_0^2}$。而这个时间是使动能以最大可能方式衰减控制下所得到的转动运动消失时间的最大值。

注：控制(3.3.27)，正如前面建立的控制，可用矢量$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{H}$在绝对系和关联系中的分量来表示。

§3.4 在位形空间和相空间中的控制

这一节研究将力学系统引向位形空间中给定位置的控制问题，并证明这样的控制可借助由被载体相对载体的运动而引起的Coriolis力和相对惯性力来实现。

1. 广义力的结构问题

(1) 将力学系统引向位形空间中的给定位置。首先研究稳定完整约束情形。设给定受有稳定完整约束的力学系统，此系统有 k 个自由度。因此系统的每个位形相应于量q_1，…，q_k的完全确定的集合；反之，每个这些量的集合相应于所研究力学系统的完全确定的位形。

对这类力学系统的第二类Lagrange方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ k) \qquad (3.4.1)$$

其中T为系统的动能，它是量$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_k$ 的正定二次形，而二次形的系数是q_1，…，q_k的函数；量Q_1，…，Q_k为广义力。

据§3.1中引出的力场规则结构定理，这些函数可表为形式

$$Q_j=\frac{\partial Q}{\partial q_j}+R_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ k) \qquad (3.4.2)$$

其中函数 $R_j(j=1, \cdots, k)$乃是管量场的分量(也称之为陀螺力)。这个场的物理性质在于它不作功，即

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j R_j = 0 \qquad (3.4.3)$$

假设函数Q和$R_j(j=1, \cdots, k)$可按量$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k$的阶展开为级数，使得

$$Q=\sum_{m=1}^{\infty} V^{(m)}, \quad R_j=\sum_{m=1}^{\infty} R_j^{(m)} \qquad (3.4.4)$$

其中$V^{(m)}$和$R_j^{(m)}$为对量$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k$的$m$次齐次形。而这些形的系数是量$q_1, \cdots, q_k$可能还有时间$t$的已知函数。

进而假设

$$V^{(1)}=\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j p_j, \qquad P=\sum_{m=2}^{\infty} P^{(m)}$$

其中

$$p_j=-\frac{\partial P}{\partial q_j}$$

这里用$P^{(m)}$表记带已知常系数的、对量$q_1-r_1, \cdots, q_k-r_k$的m次形。

于是，方程组(3.4.1)有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_j}+R_j \qquad (j=1, \cdots, k) \qquad (3.4.5)$$

定理3.4.1 如果

(*a*) 函数$V^{(2)}$对量$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k$是负定的；

(*b*) $P=P(q_1, \cdots, q_k)$对量$q_1-r_1, \cdots, q_k-r_k$是正定的，为确定起见认为二次形$P^{(2)}$是正定的；

那么方程组(3.4.5)有Ляпунов意义下的渐近稳定平衡位置

$$q_1=r_1, \cdots, q_k=r_k, \dot{q}_1=0, \cdots, \dot{q}_k=0$$

其次研究不稳定完整约束情形。如果系统所受约束为不稳定

(a) 矩阵$A(t, q_1, \cdots, q_k)$与A^{-1}在点$q_1=r_1, \cdots, q_k=r_k$的某邻域内为正定的、一致有界的；

(b) 二次形$V^{(2)}$对$\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_k$是负定的；

(c) 二次形$P^{(2)}$对$q_1-r_1, \cdots, q_k-r_k$是正定的；

那么，在方程组(3.4.1)中在广义力(3.4.7)的作用下具有Ляпунов意义下渐近稳定的平衡位置$q_1=r_1, \cdots, q_k=r_k$，$\dot{q}_1=0, \cdots, \dot{q}_k=0$。

注：在系统中有稳定约束时，使系统引向给定位形$q_1=r_1, \cdots, q_k=r_k$的广义力可如此组成，以使它们不依赖于惯性特性。而在不稳定约束情形，解上述问题的广义力将依赖于系统的惯性特性。因此，将力学系统引向指定位形而不依赖于系统惯性特性的广义力在一般情形下是不存在的。

(2) 现在转向广义力的结构，此广义力可使力学系统在位形空间中过渡到给定的随时间变化的位置

$$q_j=r_j(t) \qquad (j=1, \cdots, k) \tag{3.4.9}$$

在方程组(3.4.1)中作广义坐标变换

$$\varkappa_j=q_j-r_j(t), \quad \dot{\varkappa}_j=\dot{q}_j-\dot{r}_j(t) \tag{3.4.10}$$

我们有

$$T=\tau^{(2)}+\tau^{(1)}+\tau^{(0)} \tag{3.4.11}$$

其中$\tau^{(2)}$为对量$\dot{\varkappa}_j$的二次形，$\tau^{(1)}$为对量$\dot{\varkappa}_j$的线性形，$\tau^{(0)}$为不依赖于量$\dot{\varkappa}$的自由项。

这时(3.4.1)取形

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varkappa}_j}-\frac{\partial T}{\partial \varkappa_j}=Q_j \quad (j=1, \cdots, k) \tag{3.4.12}$$

按下述公式确定广义力

$$E=(Q_1, \cdots, Q_k)=(\mathrm{grad}\tilde{Q})^*+R \tag{3.4.13}$$

这里

$$\text{grad}\tilde{Q}=\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot{\varkappa}_k}, \ \cdots, \ \frac{\partial Q}{\partial \dot{\varkappa}_k}\right)$$

$$R=(R_1, \ \cdots, \ R_k), \ \dot{\varkappa}^*R=0 \qquad (3.4.14)$$

$$\tilde{Q}=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{V}^{(m)}$$

$$\tilde{V}^{(1)}=-\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{\partial}{\partial \varkappa_j}\left((P+\tau^{(0)})+\frac{\partial \bar{a}_j}{\partial t}\right\}\dot{\varkappa}_j\right.$$

$$\hat{V}^{(2)}=V^{(2)}+\frac{1}{2}\frac{\partial \tau^{(2)}}{\partial t} \qquad (3.4.15)$$

其中$\bar{a}_j$为线性形$\tau^{(1)}$的系数。假定$\tilde{V}^{(m)}(m=3, \cdots)$和$V^{(2)}$对$\dot{\varkappa}_1, \cdots \dot{\varkappa}_k$是齐次形，而

$$P=\sum_{m=2}^{\infty}P^{(m)} \qquad (3.4.16)$$

函数$P^{(m)}$为带常系数的、$\varkappa_1, \ \cdots, \ \varkappa_k$的齐次形。

定理3.4.3 如果满足下述条件

(a)矩阵$A(t, \ r_1+\varkappa_1, \ \cdots, \ r_k+\varkappa_k)$在点$\varkappa_1=0, \ \cdots, \ \varkappa_k=0$的某邻域内是正定的并与$A^{-1}$一起对$t$一致有界；

(b) 二次形$V^{(2)}$对$\dot{\varkappa}_1, \ \cdots, \ \dot{\varkappa}_k$是负定的；

(c) 二次形$P^{(2)}$是正定的；

那么，在方程组(3.4.1)中有 Ляпунов 意义下渐近稳定的动力平衡位置$q_j=r_j(t), \ \dot{q}_j=\dot{r}_j(t) \quad (j=1, \ \cdots, \ k)$。

注：使力学系统过渡到给定的运动位形的广义力结构，在一般情形下，是依赖于惯性特性的。

2. 控制力场的结构问题

(1) 现在研究确保力学系统过渡到给定位形的控制力场的结构问题。在控制刚体转动运动的情形，这个问题的解基于利用Coriolis力和相对运动惯性力。这种看法也有效地应用于一般情

形。

假设给定的力学系统是载体，与载体关联某质点系，它相对载体有相对运动。假设这样得到的联合力学系统受有稳定约束，而用广义坐标q_1，…，q_k，s_1，…，s_l，$l\leqslant k$来描述。

设系统受有稳定完整约束，动能取形式

$$T=\frac{1}{2}\dot{q}^*A\dot{q}+\dot{q}^*B\dot{s}+\frac{1}{2}\dot{s}^*C\dot{s} \tag{3.4.17}$$

对此系统的Lagrange方程可写成形式

$$A\ddot{q}+B\ddot{s}+\pi=M \tag{3.4.18}$$

$$C\ddot{s}+B^*\ddot{q}+\Sigma=U \tag{3.4.19}$$

这里

$$q=(q_1, \cdots, q_k), \ s=(s_1, \cdots, s_l)$$

$$\boldsymbol{M}=(M_1, \cdots, M_k), \ U=(U_1, \cdots, U_l)$$

M_1，…，M_k为与坐标q_1，…q_k相应的广义力，U_1，…，U_l为与坐标s_1，…，s_l相应的广义控制力。

这些广义控制力需如此选取，以使原始力学系统取给定的位形。矢量函数π和Σ的分量是对$\dot{q}$和$\dot{s}$的二次形。这些矢量满足关系

$$\dot{q}^*\pi+\dot{s}^*\Sigma=0$$

定理3.4.4 假设满足下列条件

(a) 二次形(3.4.17)在广义坐标的任何选取下都是正定的；

(b) 矩阵B的行线性独立，而矩阵A仅依赖于广义坐标q_1，…，q_k；

(c) $U=B^*U_0+\tilde{U}$，其中

$$U_0=[BC^{-1}B^*]^{-1}[M+BC^{-1}\Sigma-\pi+(A-BC^{-1}B^*)A^{-1}(\pi_0-F)] \tag{3.4.20}$$

当$\dot{s}=0$时，$\pi_0=\pi$，矢量函数F按公式$F=(Q_1\cdots, Q_k)$确定，而

广义力Q_j满足条件(3.4.2)、(3.4.3)、(3.4.4)，其中$V^{(2)}$为量$\dot{q}_1$，…，$\dot{q}_k$的负二次形，$P^{(2)}$为量q_1-r_1，…，q_k-r_k的正定二次形。这时，在满足条件$B\bar{U}=0$的广义力的任何选取下，在方程组(3.4.18)、(3.4.19)中有积分流形$q_j=r_j$，$\dot{q}_j=0$，$j=1$，…，k。方程组(3.4.18)、(3.4.19)分布在此积分流形上的每个运动对于量q_j-r_j，$\dot{q}_j(j=1，…，k)$是渐近稳定的。

(2) 现在转向控制力场的结构，此力场确保力学系统过渡到随时间变化的位形$q_j=r_j(t)$ $(j=1，…，k)$。

在此情形我们认为原来的力学系统和被载的质点系受有完整的，稳定的或不稳定的约束。这时对二次形(3.4.17)需添加对$\dot{q}$，$\dot{s}$的线性项和自由项。

在动能表达式中作广义坐标替换

$$\varkappa_j=q_j-r_j,\ \dot{\varkappa}_j=\dot{q}_j-\dot{r}_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ k)$$

对$\dot{\varkappa}_j$组成二次形的项记作$\tau^{(2)}$，一次形项记作$\tau^{(1)}$，而自由项记作$\tau^{(0)}$。

所研究力学系统的运动方程写成形式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=M_j \qquad (j=1,\ \cdots,\ k)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i}-\frac{\partial T}{\partial s_i}=U_i \qquad (i=1,\ \cdots,\ l)\end{aligned}\right\} \tag{3.4.21}$$

定理3.4.5 如果满足下述条件

(a) 矩阵$A(t，r_1+\varkappa_1，\cdots，r_k+\varkappa_k，s_1，\cdots，s_l)$在点$\varkappa_1=0$，…，$\mu_k=0$的某邻域内是正定的，并且与$A^{-1}$一起对$t$和$s_1$，…，$s_l$是一致有界的；

(b) 广义控制力满足关系

$$U=B^*U_0+\bar{U}$$

其中

$$\begin{aligned}U_0=&[BC^{-1}B^*]^{-1}[M+BC^{-1}\hat{\Sigma}-\hat{\pi}\\&+(A-BC^{-1}B^*)A^{-1}(\hat{\pi}_0-F)]\end{aligned}$$

$$\ddot{q}+I_kP_0^{-1}P_1\dot{x}+I_kP_0^{-1}P_2x=I_kP_0^{-1}G+P_4P_4^*\tilde{U}$$

(3.4.24)

置

$$\tilde{U}=(P_4P_4^*)^{-1}(I_kP_0^{-1}P_1\dot{x}+I_kP_0^{-1}P_2x-I_kP_0^{-1}G+\mathrm{grad}W)$$

(3.4.25)

在控制(3.4.25)下，方程(3.4.24)取形式

$$\ddot{q}=\mathrm{grad}W \qquad (3.4.26)$$

其中$W=W^{(1)}+W^{(2)}$，$W^{(1)}$为线性形，$W^{(1)}=-\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial P}{\partial q_j}\dot{q}_j$，$W^{(2)}$为$\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_k$的二次形。如果$W^{(2)}$选为负定的，而函数$P$选为$q_1,\cdots,q_k$的正定形，那么方程组(3.4.26)将有渐近稳定解$q=0$。由此得知，在方程组(3.4.23)中具有动力学可控性，而任何动力学位形在本定理条件满足下是渐近稳定的。

注：在定理3.4.6的条件满足时，非线性方程组(3.4.22)也是动力学可控的。任何动力学位形也是渐近稳定的。

动力学可控性，一般说来是控制系统的很强性质。在各种不同问题中，动力学可控性质实际上可用"简单"控制的较弱性质来替代。

假设在位形空间中给定载体的两个位置：初位置$q^{(0)}$和末位置$q^{(1)}$。要使载体在给定时间[0，T]内由位置$q^{(0)}$过渡到位置$q^{(1)}$。

类似的问题可在载体的相空间中提出。即，与初、末位置$q^{(0)}$和$q^{(1)}$一起还给出初速度$\dot{q}^{(0)}$和末速度$\dot{q}^{(1)}$。

首先研究对线性系统的这种程序运动的构造问题。设待求解存在。这时解可写成形式

$$x=Y_1x_0+Y_2\dot{x}_0+\int_0^t Y(t,\ \tau)P_0^{-1}[G+P_3U]\mathrm{d}\tau$$

(3.4.27)

将(3.4.27)左乘矩阵I_k，得到

$$q=I_kY_1x_0+I_kY_2\dot{x}_0+\int_0 I_kY(t,\ \tau)P_0^{-1}[G+P_3U]d\tau \tag{3.4.28}$$

在(3.4.28)中置$t=T$, $q(T)=q^{(1)}$，并用$B(\tau)$表记$I_kY(T,\ \tau)\times P_0^{-1}P_3$，我们求得控制为

$$U=B^*C+V \tag{3.4.29}$$

这里V为满足条件

$$\int_0^T BVdt=0$$

的控制。进而，置

$$A=\int_0^T BB^*dt$$

于是我们有

$$q^{(1)}=I_kY_1(T)x_0+I_kY_2(T)\dot{x}_0+AC$$
$$+\int_0^T I_kY(T,\ \tau)P_0^{-1}Gd\tau \tag{3.4.30}$$

定理3.4.7 如果矩阵A非奇异，那么质点系可由位形空间中的任何位置过渡到另一任何位置，也可由相空间中的任何位置过渡到相空间中的另一任何位置。因此存在实现这种过渡的控制集合。

此定理的证明可由公式(3.4.30)得到，因为如果给定x_0和$\dot{x}_0$，这个公式唯一确定矢量$q^{(1)}$。

如果矩阵A是奇异的，那么可利用矢量s_0和$\dot{s}_0$来控制。

4.拟线性系统的控制 当没有动力学可控性时，非线性系统中程序控制和程序运动的构造问题是非常复杂的。上面引出的定理可用下述方法对拟线性系统加以改写。

研究拟线性系统

$$P_0\ddot{x}+P_1\dot{x}+P_2x=G(t)+P_3U+\mu F(t,x,\dot{x})$$
(3.4.31)

我们有下述定理。

定理3.4.8 如果矩阵 A 非奇异，那么对于相空间和位形空间的任何有限域可找到一个数 $\mu_0>0$，使得当 $|\mu|<\mu_0$ 时存在控制，此控制使系统由任何指定的位置过渡到分布在所指区域上的另一任何位置。

[证明] 实际上，如果方程(3.4.31)的待求解存在，那么它必定满足关系

$$q^{(1)}=I_kY_1(T)x_0+I_kY_2(T)\dot{x}_0+AC$$
$$+\int_0^T I_kY(T,\tau)P_0^{-1}(G+\mu F)\mathrm{d}\tau \qquad (3.4.32)$$

如果求得函数 $q^{(1)}$ 对矢量 C 分量的 Jacobi 行列式，并在 $\mu=0$ 时计算它，那么它必与矩阵 A 的行列式相重合。这意味着，等式(3.4.32)确定矢量 C 作为参数 μ 的隐函数。同样地，这个矢量确定待求的控制。

习　题

1.令

$$F(t,X)=\begin{pmatrix}\sin t, \cos t, & 0\\ -2\cos t, \sin t, & 0\\ 0, \quad 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}$$

$$W(t,X)=X^*F(t,X)$$

试按定理3.1.1找到函数 $V(t,X)$ 以及反对称矩阵 P。

2.设质量为 1 的质点在势能 $V=V(x,y)$ 作用下在平面 xy 上运动，并受有约束 $\dot{y}=\dot{x}\dot{x}$。设约束反力分量 R_x,R_y 满足条件 $R_x\dot{x}+R_y\dot{y}=0$。试确定约束反力 R_x,R_y 并证明系统有积分

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2[1+t^2]+V(x,y)=\text{const}$$

3.已知某系统动能为 $T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$，广义力为

$$Q_1=-\{k_{11}\dot{q}_1+k_{12}\dot{q}_2+k_{13}\dot{q}_3+c_{11}q_1+c_{12}q_2$$
$$+c_{13}q_3\}+q_2\dot{q}_2\sin t+q_3\dot{q}_3\cos t$$
$$Q_2=-\{k_{21}\dot{q}_1+k_{22}\dot{q}_2+k_{23}\dot{q}_3+c_{21}q_1+c_{22}q_2$$
$$+c_{23}q_3\}-q_2\dot{q}_1\sin t+q_1\dot{q}_3$$
$$Q_3=-\{k_{31}\dot{q}_1+k_{32}\dot{q}_2+k_{33}\dot{q}_3+c_{31}q_1+c_{32}q_2$$
$$+c_{33}q_3\}-q_3\dot{q}_1\cos t-q_1\dot{q}_2$$

并且常数 $k_{ij}=k_{ji}$，$c_{ij}=c_{ji}$。试将方程写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}+\bar{R}_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3)$$

并求出 W 及矩阵 Γ。

4.已知某系统动能为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \qquad (a_{ij}=a_{ji}\text{，为常数})$$

势能为 $P=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}q_j^2$，广义力为

$$Q_j=-q_j-\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{k}\gamma_{ji}\dot{q}_i \qquad (\gamma_{ji}=-\gamma_{ij})$$

试利用定理3.1.5证明平衡位置 $q_j=0$，$\dot{q}_j=0$ 对坐标是稳定的。

5.试证明方程组

$$\theta\cdot\dot{\omega}+\omega\times\theta\cdot\omega=M \tag{1}$$

$$\dot{s}=-\omega\times s \tag{2}$$

在控制力矩

$$M=-\omega+s(\omega\cdot s)+kr\times s \tag{3}$$

下，仅当

$$r\times\theta\cdot r=0 \tag{4}$$

时才有平衡位置 $r=\pm s$，$\omega=\lambda s$。如果刚体为对称刚体，而 r 在对称轴上．那么(4)得以满足，试证之。

6.试由方程(3.2.8)和方程

$$\theta\cdot\dot{\omega}+\omega\times\theta\cdot\omega=M$$

导出关系(3.2.9)

7.设力学系统的第二类 Lagrange 方程为

$$\ddot{q}_1=-(q_1-r_1)-2\dot{q}_1+\dot{q}_2-\dot{q}_3$$

$$\ddot{q}_2=-(q_2-r_2)-2\dot{q}_2-\dot{q}_1+\dot{q}_3$$

$$\ddot{q}_3=-(q_3-r_3)-2\dot{q}_3+\dot{q}_1-\dot{q}_2$$

试证问题满足定理3.4.1的全部条件，因此平衡位置 $q_1=r_1$，$q_2=r_2$，$q_3=r_3$，$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\dot{q}_3=0$ 为 Ляпунов 渐近稳定的。

参考文献

[1] 梅凤翔，非完整系统力学基础，北京工业学院出版社，1985年

[2] Зубов. В. И, Аналитическая динамика системы Тел.ЛГУ.1983.

[3] Киргетов.В.И,О кинематически управляемых механических системах, П.М.М, Т.28, Вып.1, 1964.

[4] Киргетов.В.И, Об уравнениях движения управЛяемых мехаических систем, П.М.М, Т.28, Вып.2, 1964.

[5] Румянцев. В. В, О движении управляемых механических систем, П.М.М, Т40, вып.5, 1976。

[6] 梅凤翔，可控力学系统的Jourdain原理和Nielsen方程，《北京工业学院学报》，第2期，1983年。

关[4]。

Lagrange 力学逆问题的理论与方法涉及到偏微分方程组的可积性条件、微分形运算、微分流形、辛流形等数学知识。在这一章里，我们介绍逆问题的大概，主要取材于Santilli的书[5]。

§4.1 Newton系统的基本形式和运动学形式

1. Helmholtz 条件 设力学系统的位形由n个广义坐标$q^k(k=1, \cdots, n)$来确定，考虑由n个方程组成的二阶常微分方程组

$$F_i(t,q,\dot{q},\ddot{q})=F_i(t,q^1,\cdots,q^n,\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n,\ddot{q}^1,\cdots,\ddot{q}^n)=0 \quad (i=1,\cdots,n) \qquad (4.1.1)$$

其中

$$\dot{q}^k=\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{q}^k=\frac{\mathrm{d}^2q^k}{\mathrm{d}t^2} \qquad (4.1.2)$$

分别为广义速度和广义加速度。

定义 4.1.1 矩阵

$$H=\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^j}\right)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{q}^1}, & \cdots, & \frac{\partial F_1}{\partial \ddot{q}^n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \ddot{q}^1}, & \cdots, & \frac{\partial F_n}{\partial \ddot{q}^n} \end{pmatrix} \qquad (4.1.3)$$

称为方程(4.1.1)的函数矩阵。

定义4.1.2 如果函数行列式

$$|H|=|H|(R^{3n+1}) \qquad (4.1.4)$$

在点$(t,q,\dot{q},\ddot{q})$的区域R^{3n+1}上除有限个孤立点以外处处非零，就称方程组(4.1.1)为规则的。否则，称为蜕化的。

所谓二阶常微分方程组(4.1.1)的自伴随条件就是Helmholtz条件：

$$\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k}=\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i} \tag{4.1.5}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^k}+\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{q}^k}+\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^i}\right) \tag{4.1.6}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^k}-\frac{\partial F_k}{\partial q^i}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}^k}-\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^k}-\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{4.1.7}$$

它们在点$(t,q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q})$的区域$R^{4n+1}$上必须处处满足。

定理4.1.1[5] 一规则二阶常微分方程组在点$(t,q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q})$的区域$R^{4n+1}$内为自伴随的必要和充分条件是条件(4.1.5)、(4.1.6)、(4.1.7)在R^{4n+1}内处处满足。

2. **基本形式的自伴随条件** 将Newton系统写成基本形式

$$F_k=A_{ki}(t,q,\dot{q})\ddot{q}^i+B_k(t,q,\dot{q})=0 \text{ ①} \tag{4.1.8}$$

$$A_{ki},\ B_k\in C^2(R^{2n+1}) \tag{4.1.9}$$

$$|A_{ij}|\ (R^{2n+1})\neq 0 \tag{4.1.10}$$

现由Helmholtz条件(4.1.5)—(4.1.7)导出方程(4.1.8)的

①相同指标表示求和。

自伴随条件。

条件(4.1.5)现在引向简单条件

$$A_{ij}=A_{ji} \tag{4.1.11}$$

条件(4.1.7)的左端不含$\dddot{q}$，因此右端$\dddot{q}$前的系数必为零，即

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{q}^j \partial \ddot{q}^k}-\frac{\partial^2 F_j}{\partial \dot{q}^i \partial \ddot{q}^k}=0$$

因此

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}^j}=\frac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.1.12}$$

条件(4.1.12)与(4.1.11)一起意味着表达式$\frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}^j}$在指标$i$，$j$，$k$，全交换时保持不变。

由条件(4.1.6)，利用方程(4.1.8)和性质(4.1.12)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}+\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}&=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_{ij}-\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}^j}+\frac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}^i}\right)\ddot{q}^k\\&=2\left[\frac{\partial A_{ij}}{\partial t}+\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^k+\frac{\partial A_{ij}}{\partial \dot{q}^k}\ddot{q}^k\right)\right]\\&\quad-\left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}^j}+\frac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}^i}\right)\ddot{q}^k\\&=2\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}\right\}A_{ij}\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

条件(4.1.7)利用(4.1.12)可写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_i}{\partial q^j}-\frac{\partial B_j}{\partial q^i}&=\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i}-\frac{\partial A_{ik}}{\partial q^j}\right)\ddot{q}^k\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right)\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

当且仅当下述分离恒等式组成立时，它才恒等地成立

$$\frac{\partial A_{jk}}{\partial q^i}-\frac{\partial A_{ik}}{\partial q^j}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}\right) \tag{4.1.15}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial q^j}-\frac{\partial B_j}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}\right\}\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{4.1.16}$$

注意到关系(4.1.16)不是独立的，因为它们可由(4.1.13)和(4.1.12)来得到。

于是，我们得到下述独立条件组：

$$A_{ij}=A_{ji} \tag{4.1.17}$$

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}^j}=\frac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}^i} \tag{4.1.18}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}+\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}=2\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}\right\}A_{ij} \tag{4.1.19}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial q^j}-\frac{\partial B_j}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}\right\}\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{4.1.20}$$

为使方程组(4.1.9)为自伴随的，这些关系必须在R^{2n+1}上处处成立。我们称条件(4.1.17)—(4.1.20)为对基本形式的自伴随条件。

上面的情况可综合为下述定理。

定理4.1.2 对完整系统

$$A_{ki}(t,q,\dot{q})\ddot{q}^i+B_k(t,q,\dot{q})=0 \quad (k=1,\cdots,n) \tag{4.1.21}$$

它在点$(t,\ q,\ \dot{q})$的区域R^{2n+1}上满足连续、规则条件：

$$A_{ki},\ B_k\in C^m\ (R^{2n+1}),\ m\geqslant 2 \tag{4.1.22}$$

$$|A_{ki}|\ (R^{2n+1})\neq 0 \tag{4.1.23}$$

为R^{2n+1}上自伴随的必要和充分条件是所有条件(4.1.17)—(4.1.20)在R^{2n+1}上处处满足。

必须注意，当至少(4.1.17)—(4.1.20)的一个条件被破坏，我们就称为非自伴随的。

3.运动学形式的自伴随条件 现将基本形式的方程(4.1.8)写成等价的运动学形式

$$\ddot{q}^k - f^k(t,q,\dot{q}) = 0 \tag{4.1.24}$$

$$f^k \in C^2(R^{2n+1}) \tag{4.1.25}$$

且

$$f^k = -A^{ki}B_i, \quad (A^{ij}) = (A_{ij})^{-1} \tag{4.1.26}$$

现在由 Helmholtz 条件(4.1.5)—(4.1.7)导出方程(4.1.24)的自伴随条件。

条件(4.1.5)对此情形是恒成立的。条件(4.1.6)成为

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{4.1.27}$$

条件(4.1.7)可写成

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^j} - \frac{\partial f_j}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k}\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}^i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}\right)\ddot{q}^k \tag{4.1.28}$$

而当且仅当下述两条件成立时，它才能恒成立

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} = 0 \tag{4.1.29}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^j} - \frac{\partial f_j}{\partial q^i} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k}\right\}\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{4.1.30}$$

于是我们得到下述独立条件

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}^j} + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{4.1.31}$$

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k} - \frac{\partial^2 f_j}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} = 0 \tag{4.1.32}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial q^j}-\frac{\partial f_j}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{4.1.33}$$

为使方程组(4.1.24)为自伴随的这些条件必在R^{2n+1}上处处成立。我们称方程(4.1.31)—(4.1.33)为运动学形式的自伴随条件。

由(4.1.31)和(4.1.32)，容易导出

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k}=0$$

这表明f_i对$\dot{q}$是线性的。因此，对方程组(4.1.24)为自伴随的必要(但不充分)条件也是对速度为线性的方程组，即对形如

$$\ddot{q}_i-\rho_{ij}(t,q)\dot{q}^j-\sigma_i(t,q)=0 \tag{4.1.34}$$

的方程组为自伴随的条件。对方程组(4.1.34)来说，条件(4.1.31)成为

$$\rho_{ij}+\rho_{ji}=0 \tag{4.1.35}$$

而条件(4.1.33)在考虑到条件(4.1.35)后可表为

$$\left(\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial q^j}+\frac{\partial \rho_{kj}}{\partial q^i}+\frac{\partial \rho_{ji}}{\partial q^k}\right)\dot{q}^k+\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial q^j}-\frac{\partial \sigma_j}{\partial q^i}-\frac{\partial \rho_{ij}}{\partial t}\right)=0 \tag{4.1.36}$$

显然，当且仅当括号内的每一项为零时，方程(4.1.36)才能在R^{2n+1}上处处成立。于是，我们得到下述定理。

定理4.1.3 对运动学形式的方程组

$$\ddot{q}_i-f_i(t,q,\dot{q})=0 \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{4.1.37}$$

$$f_i\in C^m\ (R^{2n+1})\ ,\ m\geqslant 1 \tag{4.1.38}$$

在点$(t,q,\dot{q})$的区域R^{2n+1}上为自伴随的必要和充分条件是方程组对速度是线性的，即有形式

$$\ddot{q}_i-\rho_{ij}(t,q)\dot{q}^j-\sigma_i(t,q)=0 \tag{4.1.39}$$

$$\rho_{ij},\ \sigma_i\in C^m(R^{n+1}),\ m\geqslant 1 \tag{4.1.40}$$

并且所有条件

6.一阶方程组的情形 下面的定理适用于一阶方程组情形。

定理4.1.4 位形空间中的一阶微分方程组

$$F_k(t,q,\dot{q})=0 \qquad (k=1,\ \cdots,\ n) \tag{4.1.47}$$

它在点$(t,q,\dot{q})$的区域R^{2n+1}上至少为C^2类，此方程组为自伴随的必要和充分条件是方程组对速度是线性的，即有形式

$$F_k=X_{ki}(t,\ q)\dot{q}^i+Y_k(t,\ q)=0 \tag{4.1.48}$$

并且所有自伴随条件

$$X_{ki}+X_{ik}=0 \tag{4.1.49}$$

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial q^k}+\frac{\partial X_{jk}}{\partial q^i}+\frac{\partial X_{ki}}{\partial q^j}=0 \tag{4.1.50}$$

$$\frac{\partial X_{ij}}{\partial t}=\frac{\partial Y_j}{\partial q^i}-\frac{\partial Y_i}{\partial q^j} \tag{4.1.51}$$

在点$(t,\ q)$的子域$R^{n+1}\in R^{2n+1}$上恒成立。

[证明] 对方程组(4.1.17)的条件(4.1.31)—(4.1.33)在简单变换后成为

$$\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^k}+\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}^i}=0 \tag{4.1.52}$$

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{q}^k\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial^2 F_k}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}=0 \tag{4.1.53}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^j}-\frac{\partial F_j}{\partial q^i}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^k}\right\}\left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{q}^j}-\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}^i}\right) \tag{4.1.54}$$

由(4.1.52)和(4.1.53)容易导出

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial \dot{q}^k\partial \dot{q}^j}=0$$

即要求F_i对$\dot{q}$是线性的。而条件(4.1.49)—(4.1.51)可由关系(4.1.52)—(4.1.54)用于方程(4.1.48)而得到。[证毕]

§4.2 自伴随与非自伴随的例子

例1 一维谐振子的运动学形式的方程为

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0,\ \omega_0^2=\frac{k}{m} \tag{4.2.1}$$

我们应用推论 4.1.2。因 $f=-\omega_0^2 x$，显然有 $f\in C^m(R^1)$，$m\geq 1$；又 f 不依赖于 $\dot{q}$，推论 4.1.2 满足，故系统是自伴随的。

然而，如果对 $x\neq 0$ 同样的方程写成形式

$$\frac{\ddot{x}}{x}+\omega_0^2=0 \tag{4.2.2}$$

那么它是非自伴随的。这可由推论 4.1.1 来判断。将(4.2.2)写成形式(4.1.44)，有

$$A=\frac{1}{x},\qquad B=\omega_0^2$$

于是

$$\frac{\partial B}{\partial \dot{q}}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial A}{\partial q}\dot{q}=-\frac{1}{x^2}\dot{x}\neq 0$$

故条件(4.1.45)不成立，形式(4.2.2)是非自伴随的。

例2 基本形式

$$\left.\begin{aligned}m_1\ddot{x}_1+m_c\ddot{x}_2+k_1x_1+k_cx_2=0\\ m_c\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2+k_cx_1+k_2x_2=0\end{aligned}\right\} \tag{4.2.3}$$

表示两线性、耦合、带常数 m_c 和 k_c 的无阻尼振子系统。对 $m_c=k_c=0$ 的情形，两振子为去耦的。

因系统高于一维，在研究自伴随前必须检验其规则性。

此情形下的函数行列式为

$$\begin{vmatrix} m_1, & m_c\\ m_c, & m_2\end{vmatrix}=m_1m_2-m_c^2$$

因此系统为规则的充要条件是

$$m_1m_2\neq m_c^2 \tag{4.2.4}$$

现用条件(4.1.17)—(4.1.20)来检验其自伴随性。我们有

$$\left.\begin{aligned}A_{11}=m_1,\ A_{12}=m_c,\ B_1=k_1x_1+k_cx_2\\ A_{21}=m_c,\ A_{22}=m_2,\ B_2=k_cx_1+k_2x_2\end{aligned}\right\}\tag{4.2.5}$$

于是条件(4.1.17)—(4.1.19)显然成立。又

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_2}-\frac{\partial B_2}{\partial x_1}=0$$

故条件(4.1.20)也成立。因此，系统是自伴随的。

例3 试证一维系统

$$a(t)\ddot{q}+b(t)\dot{q}+c(t)q+d(t)=0\tag{4.2.6}$$

的自伴随条件为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)=b(t)\tag{4.2.7}$$

[证明] 利用推论4.1.1，有

$$A=a(t)$$

$$B=b(t)\dot{q}+c(t)q+d(t)$$

于是

$$\frac{\partial B}{\partial \dot{q}}=b(t),\quad \frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t),\quad \frac{\partial A}{\partial q}=0$$

自伴随的必要和充分条件(4.1.45)成为

$$b(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t)$$

[证毕]

例4 试证方程组

$$\left.\begin{aligned}q_1^2\ddot{q}_1+\frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_2+q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+t(2q_1+q_2)=0\\ \frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_1+q_2^2\ddot{q}_2+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2+q_2\dot{q}_2^2+t(q_1+2q_2)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.2.8}$$

$$q_1 \neq 0, \quad q_2 \neq 0$$

是自伴随的。

[证明] 由(4.2.8)知

$$A_{11}=q_1^2, \quad A_{12}=\frac{1}{2}q_1q_2, \quad A_{21}=\frac{1}{2}q_1q_2, \quad A_{22}=q_2^2$$

$$B_1=q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+t(2q_1+q_2)$$

$$B_2=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2q_2+q_2\dot{q}_2^2+t(q_1+2q_2)$$

显然连续条件(4.1.22)得以满足。又

$$|A_{ki}|=\begin{vmatrix} q_1^2, & \frac{1}{2}q_1q_2 \\ \frac{1}{2}q_1q_2, & q_2^2 \end{vmatrix}=\frac{3}{4}q_1^2q_2^2\neq 0$$

因为假设 $q_1\neq 0$, $q_2\neq 0$。因此规则条件(4.1.23)得以满足。容易验证条件(4.1.17)—(4.1.20)都得到满足。因此方程组(4.2.8)是自伴随的， [证毕]

§4.3 位形空间公式的基本解析定理

1.基本形式的 Lagrange 表达式的结构 基本形式(4.1.8)的 Lagrange 表达式，即等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{k_1}}-\frac{\partial L}{\partial q^{k_1}}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}\ddot{q}^{k_2}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial q^{k_2}}\dot{q}^{k_2}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q^{k_1}}$$

$$=A_{k_1k_2}\ddot{q}^{k_2}+B_{k_1} \tag{4.3.1}$$

$$(k_1=1, \cdots, n)$$

要求下列两组方程成立：

方程

$$\frac{\partial C}{\partial q^{k_1}}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q^{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial t}+\frac{\partial^2 K}{\partial q^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}$$

$$\times\dot{q}^{k_2}+\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}^{k_2}}\dot{q}^{k_2}-\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^{k}\frac{\partial}{\partial q^{k}}\right\}\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}\dot{q}^{k_2}$$

$$(4.3.8)$$

它构成等式(4.3.1)的第三个独立方程组，需与(4.3.5)、(4.3.7)联合。

现在假设自伴随条件(4.1.17)—(4.1.19)对方程组(4.1.8)成立。那么利用方程(4.3.6)和(4.1.19)，方程组(4.3.5)、(4.3.7)和(4.3.8)可写成

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}=A_{k_1k_2} \tag{4.3.9}$$

$$\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q^{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q^{k_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}^{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}^{k_1}}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial q^{k_2}}\right)=Z_{k_1k_2} \tag{4.3.10}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q^{k_1}}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q^{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial t}+\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}^{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}^{k_1}}\right)\right]\dot{q}^{k_2}=W_{k_1} \tag{4.3.11}$$

其中每个方程的右边都可当作已知的。它们分别为对 K 的二阶偏微分方程的超定系统、对 D_k 和对 C 的一阶偏微分方程的超定系统。

2.位形空间中的解析表达式 我们引进下述定义。

定义4.3.1 一个 C^2 类、规则、完整运动方程组在变量 $(t, q, \dot{q})$ 的区域 R^{2n+1} 上允许有用 Lagrange 方程表示的解析表

达式，如果存在 n^2 个函数 $h_k^i(t, q, \dot{q})$，它在 R^{2n+1} 上(至少)为 C^2 类并且矩阵 (h_k^i) 是规则的，使得常规 Lagrange 方程与在引进矩阵 (h_k^i) 下进行等价变换的运动方程相重合，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}-\frac{\partial L}{\partial q^k}=h_k^i(A_{ij}\ddot{q}^j+B_i)\quad (k=1,\ \cdots,\ n) \tag{4.3.12}$$

$$h_k^i\in C^2(R^{2n+1}) \tag{4.3.13}$$

$$|h_k^i|(R^{2n+1})\neq 0 \tag{4.3.14}$$

或者说，运动方程与引入逆矩阵 $(h^{-1}{}_k^i)=(h_k^i)^{-1}$ 下进行等价变换的 Lagrange 方程相重合，即

$$h^{-1}{}_k^i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}\right)=A_{kj}\ddot{q}^j+B_k \tag{4.3.15}$$

$$(h^{-1}{}_k^i=(h_k^i)^{-1}) \tag{4.3.16}$$

定义4.3.2 如果因子函数矩阵 (h_k^i) 是(不是)单位矩阵 (δ_k^i)，则定义 4.3.1 的解析表达式称为直接的(间接的)。

我们用一简单例子来说明直接和间接解析表达式。考虑两非耦合谐振子的自治组，其运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\ddot{q}_1+\omega^2q_1=0\\ \ddot{q}_2+\omega^2q_2=0\end{aligned}\right\} \tag{4.3.17}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}\omega^2(q_1^2+q_2^2) \tag{4.3.18}$$

用此 Lagrange 函数计算 Lagrange方程，我们得到

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^1}-\dfrac{\partial L}{\partial q^1}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^2}-\dfrac{\partial L}{\partial q^2}\end{pmatrix}_{SA}=\begin{pmatrix}\ddot{q}_1+\omega^2q_1\\ \ddot{q}_2+\omega^2q_2\end{pmatrix}_{SA}=0 \tag{4.3.19}$$

其中记号 SA 表示自伴随。因此，在此情形，我们有运动方程(4.3.17)的直接解析表达式。

但是下面形式的 Lagrange 函数也是允许的：

$$L^*=\dot{q}_1\dot{q}_2-\omega^2 q_1 q_2 \tag{4.3.20}$$

用这个新的 Lagrange 函数计算 Lagrange 方程，我们有

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^1}-\dfrac{\partial L^*}{\partial q^1} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^2}-\dfrac{\partial L^*}{\partial q^2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1+\omega^2 q_1 \\ \ddot{q}_2+\omega^2 q_2 \end{pmatrix}_{\mathrm{SA}}\Bigg|_{\mathrm{SA}}=0 \tag{4.3.21}$$

这显然是方程组(4.3.17)的间接解析表达式，在此情形，因子函数 h_k^i 表征指标的置换。由(4.3.20)看出，变量$(q_1,\ q_2)$下的 Lagrange 方程再现了变量$(q_2,\ q_1)$下的运动方程，反之亦然。还可看到，两个 Lagrange 函数(4.3.18)和(4.3.20)都是规则的，这由相应的 Hess 行列式容易验证：

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \\ &\left|\frac{\partial^2 L^*}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}\right|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1 \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

严格地说，只有 Lagrange 函数(4.3.18)才能将所考虑的方程组表为形式(4.3.17)，而表达式(4.3.21)要求知道 Lagrange 函数(4.3.20)以及因子函数 h_k^i 的四个元素。必须注意，在此简单情形表示为直接的或是间接的，在最终分析中并不重要，因为这涉及到运动方程的假定顺序。例如，将方程(4.3.17)颠倒顺序，这时表达式(4.3.21)变成直接解析表达，而表达式(4.3.19)成了间接解析表达。

我们引进有序和无序的定义。

定义 4.3.3 定义 4.3.1 和 4.3.2 的解析表达式称为有序的

(无序的)，如果在给定的顺序上对所有指标 $k=1, 2, \cdots, n$，方程(4.3.1)或(4.3.4)各个重合(不重合)。

实际上，有序直接解析表达式的概念意味着 Lagrange 方程和运动方程不仅作为方程组重合，而且对指标 k 的给定顺序项项重合。在此情形，我们写成

$$L_k(q)=A_{ki}\ddot{q}^i+B_k \quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{4.3.23}$$

反之，无序直接解析表达意味着上述方程两端仅作为方程组重合，而不管相应的顺序。在此情形，我们记作

$$\{L_k(q)\}=\{A_{ki}\ddot{q}^i+B_k\} \tag{4.3.24}$$

例如，方程(4.3.19)表征在顺序 $q=(q_1, q_2)$ 上为运动方程(4.3.17)的有序直接解析表达式，而方程(4.3.21)表征同样顺序上的无序直接解析表达式。

实际上，有序直接解析表达式意味着，对于 C^2 类规则方程组在所设顺序上成立等式

$$\underset{\text{Lagrange 方程}}{L_k(q)} \equiv \underset{\text{运动方程}}{F_k(q)} \tag{4.3.25}$$

而有序间接解析表达式意味着下述等式成立：

$$\underset{\text{Lagrange 方程}}{L_k(q)} \equiv \underset{\text{运动方程}}{F_k^{eq}(q)=h_k^iF_i(q)} \tag{4.3.26}$$

我们用一例子来说明上述注意事项。考虑方程组(4.3.17)的简单推广

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1+b\dot{q}_1+\omega^2q_1 \\ \ddot{q}_2-b\dot{q}_2+\omega^2q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}=(c_{ki}\ddot{q}^i)+(b_{ki}\dot{q}^i)+(a_{ki}q^i)=0 \tag{4.3.27}$$

它表示非保守力 $F=-b\dot{q}_1+b\dot{q}_2$ 的出现。这是带常系数的二阶常

微分方程的二维线性系统。自伴随条件(4.1.17)—(4.1.20)现在变成

$$c_{ki}=c_{ik} \tag{4.3.28}$$

$$b_{ki}=-b_{ik} \tag{4.3.29}$$

$$a_{ki}=a_{ik} \tag{4.3.30}$$

因为方程(4.3.29)被破坏，系统(4.3.27)便是非自伴随的。提前应用下边的基本解析定理,可能会得出结论：对这样系统Lagrange 函数不存在。然而，这个结论是错误的。实际上，方程(4.3.27)的解析表达式是已知的，并且由 Morse 和 Feshbach (1953)给出[6]：

$$L^{*}=\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}b(q_1\dot{q}_2-\dot{q}_1q_2)-\omega^2q_1q_2 \tag{4.3.31}$$

用此 Lagrange 函数计算 Lagrange 方程，我们得到

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L^*}{\partial\dot{q}^1}-\dfrac{\partial L^*}{\partial q^1}\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L^*}{\partial\dot{q}^2}-\dfrac{\partial L^*}{\partial q^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{q}_1+b\dot{q}_1+\omega^2q_1\\ \ddot{q}_2-b\dot{q}_2+\omega^2q_2\end{pmatrix} \tag{4.3.32}$$

因此，我们有运动方程的有序间接解析表达式。然而，在上述等式左端和右端之间出现了不一致。因为要求 Lagrange 方程是自伴随的，而运动方程(4.3.27)是非自伴随的。为使两端都是自伴随的，只要将方程组重新写成下述形式

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{q}_1+b\dot{q}_1+\omega^2q_1\\ \ddot{q}_2-b\dot{q}_2+\omega^2q_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}0&-b\\b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\omega^2\\ \omega^2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$$

$$=(c'_{ki}\ddot{q}^i)+(b'_{ki}\dot{q}^i)+(a'_{ki}q^i)$$
$$=0 \tag{4.3.33}$$

容易验证运动方程的这种等价形式实际上满足全部条件(4.3.28)—(4.3.30)，因此它是自伴随的。

由 Morse 和 Freshbach 给出的 Lagrange 函数的表达，通过简单指标交换运动方程由原来的非自伴随形式(4.3.27)变为等价的自伴随形式(4.3.33)，用符号写成

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^1}-\frac{\partial L^*}{\partial q^1} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}^2}-\frac{\partial L^*}{\partial q^2} \end{pmatrix}_{SA}=\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}_1+b\dot{q}_1+\omega^2 q_1 \\ \ddot{q}_2-b\dot{q}_2+\omega^2 q^2 \end{pmatrix}_{NSA}\right]_A^S$$
$$=0 \tag{4.3.34}$$

到中 NSA 表示非自伴随。

如果有序条件变化，那么由简单计算代替方程(4.3.26)可得其方程

$$\{L_k^*(q)\}=\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1+b\dot{q}_1+\omega^2 q_1 \\ \ddot{q}_2-b\dot{q}_2+\omega^2 q_2 \end{Bmatrix}=\{F_k(q)\} \tag{4.3.35}$$

其中采用记号(4.3.24)。

前面已指出，方程组(4.3.27)是(4.3.17)的简单非保守推广。Morse-Freshbach Lagrange 函数(4.3.31)就是 Lagrange 函数(4.3.20)的推广。一个重要的问题是：对方程组(4.3.27)的表达式，Lagrange 函数(4.3.18)的推广是否也存在。答案是这样的 Lagrange 函数是存在的，并由下式给出

$$L=e^{bt}\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2-\omega^2 q_1^2)+e^{-bt}\frac{1}{2}(\dot{q}_2^2-\omega^2 q_2^2) \tag{4.3.36}$$

在指出的顺序下，间接解析表达式为

达式。

对一维情形，等式(4.3.40)成为

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}\ddot{q}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial q}\dot{q}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\equiv A(t,\ q,\ \dot{q})\ddot{q}+B(t,\ q,\ \dot{q}) \qquad (4.3.41)$$

如果(4.3.41)右端是非自伴随的，那么直接表达式不存在，但可有间接表达式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}\equiv[h(t,\ q,\ \dot{q})(A\ddot{q}+B)_{\mathrm{NSA}}]_{\mathrm{SA}} \qquad (4.3.42)$$

其中因子函数 h 作为一个积分因子。

§4.4 构造 Lagrnage 函数的 Santilli 方法

1. Santilli 方法 构造 Lagrange 函数的 Santilli 方法用定理形式给出。

定理 4.4.1 在点$(t,\ q,\ \dot{q})$的一星形区域 R^{*2n+1} 上定义的、(至少)为 C^2 类的、规则、自伴随完整非保守系统

$$A_{ki}(t,\ q,\ \dot{q})\ddot{q}^i+B_k(t,\ q,\ \dot{q})=0$$

$$(k=1,\ \cdots,\ n) \qquad (4.4.1)$$

其有序直接解析表达的 Lagrange 函数由下式给出

$$L=K(t,\ q,\ \dot{q})+D_k(t,\ q)\dot{q}^k+C(t,\ q) \qquad (4.4.2)$$

其中 $n+2$ 个函数 K，D_k，C 是下述线性超定偏微分方程组的解

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}=A_{k_1k_2}(t,\ q,\ \dot{q}) \qquad (4.4.3)$$

$$\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q^{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q^{k_1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}^{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}^{k_1}}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 K}{\partial^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial q^{k_2}}\right)\equiv Z_{k_1k_2}(t,\ q) \qquad (4.4.4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial q^{k_1}}=\frac{\partial D^{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\frac{\partial K}{\partial q^{k_1}}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial t}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}^{k_2}}-\frac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}^{k_1}}\right)\right]\dot{q}^{k_2}=W_{k_1}(t,\ q) \tag{4.4.5}$$

而解给出为

$$K(t,\ q,\ \dot{q})$$

$$=\dot{q}^{k_1}\int_0^1 \mathrm{d}\tau'\left[\left\{\int_0^1 \mathrm{d}\tau A_{k_1k_2}(t,\ q,\tau\dot{q})\right\}\dot{q}^{k_2}\right](t,\ q,\ \tau'\dot{q}) \tag{4.4.6}$$

$$D_{k_1}=\left\{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\tau Z_{k_1k_2}(t,\ \tau q)\right\}q^{k_2} \tag{4.4.7}$$

$$C=\left\{\int_0^1 \mathrm{d}\tau W_k(t,\ \tau q)\right\}q^k \tag{4.4.8}$$

对上述定理有以下几点注意。首先，定理4.4.1在计算Lagrange函数时不必知道基本运动方程的解。其次，在定理假设下不必验证方程(4.4.3)—(4.4.5)的相容性。实际上，定理的充分性证明是基于这样事实的：自伴随条件是方程组(4.4.3)—(4.4.5)的可积条件。因此，实际应用时，必须验证所给运动方程组在星形区域R^{*2n+1}上是有定义的、(至少)C^2类的、规则的且自伴随的。如果这些条件满足，方程(4.4.3)—(4.4.5)的解存在并由关系(4.4.6)—(4.4.8)给出。第三，方程(4.4.6)—(4.4.8)的解必须按指定顺序计算，即，首先由运动方程的函数$A_{k_1k_2}$根据(4.4.6)解方程(4.4.3)；知道解K并由运动方程的项B_k可通过方程(4.4.7)计算函数D_k；最后，知道K，D_k和B_k通过方程(4.4.8)来计算函数C。

下面研究运动学形式系统的有序直接解析表达式。在自伴随条件下，这种形式归结为(4.1.39)、(4.1.40)。因此，问题归结为等式

$$\frac{\partial D_{k_1}}{\partial q^{k_2}}-\frac{\partial D_{k_2}}{\partial q^{k_1}}=-\rho_{k_1 k_2} \tag{4.4.17}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q^{k_1}}=\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}+\sigma_{k_1} \tag{4.4.18}$$

而 D_{k_1}，C 由下式给出

$$D_{k_1}=-\left\{\int_0^1 \mathrm{d}\tau \rho_{k_1 k_2}(t,\tau q)\right\}q^{k_2} \tag{4.4.19}$$

$$C=\left\{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left(\sigma_{k_1}+\frac{\partial D_{k_1}}{\partial t}\right)(t,\ \tau q)\ \right\}q^{k_1} \tag{4.4.20}$$

上述推论可进一步简化。自伴随条件(4.4.10)和(4.4.11)意味着函数 $\rho_{k_1 k_2}$ 必有旋度结构。因此，在所设条件下，存在一组函数 $\Gamma_k(t,\ q)$使得

$$\rho_{k_1 k_2}=\frac{\partial \Gamma_{k_1}}{\partial q^{k_1}}-\frac{\partial \Gamma_{k_1}}{\partial q^{k_2}} \tag{4.4.21}$$

而自伴随条件仅归结为方程(4.4.12)，函数 D_k 由下式确定

$$D_{k_1}=\Gamma_{k_1} \tag{4.4.22}$$

而 Lagrange 函数(4.4.16)取形式

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_{k_1}\dot{q}_{k_1}+\Gamma_{k_1}(t,\ q)\dot{q}_{k_1}+C(t,\ q) \tag{4.4.23}$$

其中未知函数 C 是相应方程(4.4.18)的解，即

$$C=q^k\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left(\sigma_k+\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t}\right)(t,\ \tau q)$$

2.非保守力对 Lagrange 函数结构的影响　显然，保守力为逆问题所允许。例如，考虑单位质量的质点系，系统无约束，用变量 q^k (笛卡儿坐标)表示按给定顺序的坐标。假设在等式(4.4.9)中 $\rho_{k_1 k_2}$ 恒为零。自伴随条件(4.4.10)—(4.4.12)归结为

$$\frac{\partial \sigma_{k_1}}{\partial q_{k_2}}-\frac{\partial \sigma_{k_2}}{\partial q_{k_1}}=0 \tag{4.4.24}$$

而这与对存在势函数的可积条件相重合。

研究单位质量的 N 个质点的无约束系统，在一参考系中用变量 $q^k(k=1, \cdots, n)$ 表示，其中 $n=3N$。首先，设这些质点是自由的。运动方程为

$$\ddot{q}^k=0 \qquad (k=1, \cdots, n) \tag{4.4.25}$$

对其解析表达的 Lagrange 函数可写成

$$L=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\dot{q}^k)^2=T_{free} \tag{4.4.26}$$

问题在于研究这些自由质点耦合的最一般形式使之可用Lagrange 函数表达，即用定理 4.4.1 表示。

有下列三类耦合。

(1) 依赖于时间的、对坐标一般为非线性的耦合

在此情形运动方程(4.4.25)修正为形式

$$\ddot{q}_k-f_k(t, q)=0 \tag{4.4.27}$$

而保守耦合类是这类耦合的特殊情形，因为当函数 f_k 不显含t并满足可积条件(4.4.24)时就是保守耦合类。

(2) 依赖于时间的、对速度为非线性的耦合

在此情形下，运动方程(4.4.25)修正为

$$\ddot{q}_k-f'_k(t, \dot{q})=0 \tag{4.4.28}$$

这一类不包含保守耦合。

如果前两类联合，那么运动方程(4.4.25)可修正为运动学形式的方程

$$\ddot{q}_k-f_k(t, q, \dot{q})=0 \tag{4.4.29}$$

(3) 依赖于时间、坐标和速度的耦合，对加速度是线性的

在此情形，运动方程(4.4.25)可修正为

$$A_{ki}(t, q, \dot{q})\ddot{q}^i=0 \tag{4.4.30}$$

将以上三类耦合联合，就引向运动方程的基本形式

$$A_{ki}(t, q, \dot{q})\ddot{q}^i + B_k(t, q, \dot{q}) = 0 \tag{4.4.31}$$

例如，考虑振子系统。线性的、不依赖于时间的1类耦合产生形式

$$\ddot{q}_k + C_{ki}q^i = 0 \tag{4.4.32}$$

方程(4.4.32)的一个自然推广就是加进不依赖于时间的、线性的2类耦合，得到耦合阻尼振子形式

$$\ddot{q}_k + b_{ki}\dot{q}^i + c_{ki}q^i = 0 \tag{4.4.33}$$

进一步推广，得到常系数线性系统

$$a_{ki}\ddot{q}^i + b_{ki}\dot{q}^i + c_{ki}q^i = 0 \tag{4.4.34}$$

需要注意的是，加速度耦合对运动方程说来是非本质的，因为在规则性假定下，基本形式(4.4.31)总可以缩减为运动学形式(4.4.29)，只要借助等式

$$f_k = -A^{-1}{}_k{}^i B_i, \quad (A^{-1}{}_k{}^i) = (A_{ki})^{-1} \tag{4.4.35}$$

运动学形式的方程(4.4.29)是非自伴随的(通常的耦合形式例外)，而因此由定理4.4.1知，对有序直接解析表达的Lagrange 函数不存在。这是因为自伴随条件限制运动学形式为最简单形式(4.4.15)，它表示1类耦合的最一般形式，但是2类耦合限于对速度为线性的，而3类耦合不存在。

为表示这类运动方程，不得不研究间接表达式，即等价系统的表达式。

$$\{h_k^i(t, q, \dot{q})[\ddot{q}^i - f_i(t, q, \dot{q})]_{NSA}\}_{SA} = 0 \tag{4.4.36}$$

即利用因子函数 h_k^i 引向自伴随结构。如果运动方程的这类等价自伴随形式存在，那么由定理4.3.1知道对它的解析表达式的 Lagrange 函数存在。

我们给出定理4.4.1的下面两个推论。

推论4.4.2 对于局部完整一般非保守的相互作用 Newton 系统

$$\ddot{q}_{k_1}+\left\{\frac{\partial \Gamma_{k_1}(t, q)}{\partial q^{k_2}}-\frac{\partial \Gamma_{k_2}(t, q)}{\partial q^{k_1}}\right\}\dot{q}^{k_2}$$

$$-\sigma_{k_1}(t, q)=0 \qquad (k_1=1, \cdots, n) \qquad (4.4.37)$$

它在点(t, q)的星形区域R^{*2n+1}上定义的、(至少)为C^2类并且是自伴随的，其有序直接解析表达的全 Lagrange 函数由下式给出

$$L_{tot}=L_{free}(\dot{q})+L_{int}(t, q, \dot{q})=\sum_{k=1}^{n} L_{free}^{(k)}+L_{int} \qquad (4.4.38)$$

其中

$$L_{free}^{(k)}=\frac{1}{2}(\dot{q}^k)^2 \qquad (4.4.39)$$

$$L_{int}=\Gamma_k(t, q)\dot{q}^k+C(t, q) \qquad (4.4.40)$$

并且函数C由下式给出

$$C=q^k\int_0^1 d\tau\left(\sigma_k+\frac{\partial \Gamma_k}{\partial t}\right)(t, \tau q) \qquad (4.4.41)$$

推论4.4.3 对局部完整一般非保守的相互作用 Newton 系统在基本形式下

$$A_{ki}(t, q, \dot{q})\ddot{q}^i+B_k(t, q, \dot{q})=0 \ (k=1, \cdots, n) \qquad (4.4.42)$$

它是在点$(t, q, \dot{q})$的星形区域R^{*2n+1}上定义的(至少)为C^2类、规则的且自伴随的，其有序直接解析表达的全 Lagrange 函数的一般结构由$n+1$个相互作用项，n个相乘项，以及对每个质点的自由运动的 Lagrange 函数的一个相加项来表征，相应于广义结构

$$L_{tot}^{gen}(t, q, \dot{q})=\sum_{k=1}^{n} L_{int,I}^{(k)}(t, q, \dot{q})L_{free}^{(k)}$$

$$+L_{int,II}(t, q, \dot{q}) \qquad (4.4.43)$$

其中 $L_{\text{int},\text{I}}^{(k)}$，$L_{\text{free}}^{(k)}$ 和 $L_{\text{int},\text{II}}$ 分别为

$$L_{\text{int},\text{I}}^{(k)}=K_{\text{I}}^{(k)}(t,\ q,\ \dot{q})+D_{i\text{I}}^{(k)}(t,\ q)\dot{q}^{i}+C_{\text{I}}^{(k)}(t,\ q) \tag{4.4.44}$$

$$L_{\text{free}}^{(k)}=\frac{1}{2}(\dot{q}^{k})^{2} \tag{4.4.45}$$

$$L_{\text{int},\text{II}}=K_{\text{II}}(t,\ q,\ \dot{q})+D_{i\text{II}}(t,\ q)\dot{q}^{i}+C_{\text{II}}(t,\ q) \tag{4.4.46}$$

并用以下等式表示方程(4.4.3)—(4.4.5)的解(4.4.6)—(4.4.8)

$$K(t,\ q,\ \dot{q})=\sum_{k=1}^{n}L_{\text{int},\text{I}}^{(k)}L_{\text{free}}^{(k)}+K_{\text{II}} \tag{4.4.47}$$

$$D_{k}=D_{k\text{II}} \tag{4.4.48}$$

$$C=C_{\text{II}} \tag{4.4.49}$$

§4.5 构造Lagrange函数的其他方法

1. **Engels 第一方法**[7,5] 考虑一基本形式的二阶常微分方程组

$$F_{k}=A_{ki}(t,\ q,\ \dot{q})\ddot{q}^{i}+B_{k}(t,\ q,\ \dot{q})=0 \tag{4.5.1}$$

它满足定理4.3.1的全部条件，特别是全部自伴随条件(4.1.17)—(4.1.20)。

Engels 1978 年给出的 Lagrange 函数的形式如下：

$$L(t,\ q,\ \dot{q})=-q^{k}\int_{0}^{1}\mathrm{d}\tau F_{k}(t,\ \tau q,\ \tau\dot{q},\ \tau\ddot{q})$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'(\tau q^{k})A_{ki}(t,\ \tau q,\ \tau\tau'\dot{q})\dot{q}^{i} \tag{4.5.2}$$

2. **Engels 第二方法**[8,5] Engels 1975年给出的 Lagrange函数形式如下：

$$L(t,\ q,\ \dot{q})=\int_{c_j}^{q_j}\mathrm{d}\dot{q}^{j}\Phi_{j}(t,\ q,\ \dot{q}_{1}=c_{1},\ \cdots,\ \dot{q}_{j-1}$$

例1 试用三种方法构造§4.2中例4的Lagrange函数。

[解] 1°Santilli方法。由(4.2.8)知

$$\left.\begin{aligned}&A_{11}=q_1^2,\ A_{12}=\frac{1}{2}q_1q_2,\ A_{21}=\frac{1}{2}q_1q_2,A_{22}=q_2^2\\&B_1=q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+t(2q_1+q_2)\\&B_2=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2q_2+q_2\dot{q}_2^2+t(q_1+2q_2)\end{aligned}\right\}\tag{4.6.1}$$

系统在星形区域上是C^∞类，规则的并且是自伴随的(§4.2)。因此满足定理4.4.1的全部条件。那么Lagrange函数是存在的。为造出Lagrange函数，先按(4.4.6)计算K，我们有

$$K=(\dot{q}_1\dot{q}_2)\int_0^1\mathrm{d}\tau'\left(\int_0^1\mathrm{d}\tau\begin{pmatrix}q_1^2 & \frac{1}{2}q_1q_2\\ \frac{1}{2}q_1q_2 & q_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\end{pmatrix}\right)(\tau'\dot{q})$$

$$=(\dot{q}_1\dot{q}_2)\int_0^1\mathrm{d}\tau'\begin{pmatrix}q_1^2\tau'\dot{q}_1+\frac{1}{2}q_1q_2\tau'\dot{q}_2\\ \frac{1}{2}q_1q_2\tau'\dot{q}_1+q_2^2\tau'\dot{q}_2\end{pmatrix}$$

$$=(\dot{q}_1\dot{q}_2)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}q_1^2\dot{q}_1+\frac{1}{4}q_1q_2\dot{q}_2\\ \frac{1}{4}q_1q_2\dot{q}_1+\frac{1}{2}q_2^2\dot{q}_2\end{pmatrix}$$

$$=\dot{q}_1\left(\frac{1}{2}q_1^2\dot{q}_1+\frac{1}{4}q_1q_2\dot{q}_2\right)+\dot{q}_2\left(\frac{1}{4}q_1q_2\dot{q}_1+\frac{1}{2}q_2^2\dot{q}_2\right)$$

$$=\frac{1}{2}(q_1^2\dot{q}_1^2+q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+q_2^2\dot{q}_2^2)\tag{4.6.2}$$

再由(4.4.4)求出$Z_{k_1k_2}(t,q)$，我们有

$$
\left.\begin{aligned}
Z_{11}&=Z_{22}=0\\
Z_{12}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1}\right)+\left(\frac{\partial^2 K}{\partial q_1 \partial \dot{q}_2}-\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2}\right)\\
&=\frac{1}{2}(q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1)+\frac{1}{2}(q_2\dot{q}_1-q_1\dot{q}_2)=0\\
Z_{21}&=0
\end{aligned}\right\}
\tag{4.6.3}
$$

将(4.6.3)代入(4.4.7)，得到

$$
D_1=D_2=0 \tag{4.6.4}
$$

然后按(4.4.5)计算 W_{k1}，我们有

$$
\left.\begin{aligned}
W_1&=\frac{\partial D_1}{\partial t}-B_1-\frac{\partial K}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_1 \partial t}+\frac{\partial^2 K}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1}\dot{q}_1\\
&\quad+\frac{\partial^2 K}{\partial q_1 \partial \dot{q}_2}\dot{q}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2}-\frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1}\right)\dot{q}_2\\
&=-\left[q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2+t(2q_1+q_2)\right]\\
&\quad-\left(q_1\dot{q}_1^2+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2\right)+(2q_1\dot{q}_2\\
&\quad+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_2)\dot{q}_1+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}(q_1\dot{q}_1\\
&\quad-q_2\dot{q}_1)\dot{q}_2\\
&=-t(2q_1+q_2)\\
W_2&=\frac{\partial D_2}{\partial t}-B_2-\frac{\partial K}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_2 \partial t}+\frac{\partial^2 K}{\partial q_2 \partial \dot{q}_1}\dot{q}_1\\
&\quad+\frac{\partial^2 K}{\partial q_2 \partial \dot{q}_2}\dot{q}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_2}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial B_1}{\partial \dot{q}_2}\right)\dot{q}_1\\
&=-t(q_1+2q_2)
\end{aligned}\right\}
\tag{4.6.5}
$$

将(4.6.5)代入(4.4.8)得到

$$
C=\int_0^1 \mathrm{d}\tau\{-t(2\tau q_1+\tau q_2)q_1-t(\tau q_1+2\tau q_2)q_2\}
$$

$$= -t\left[\ tq_1^2 + \frac{1}{2}q_1q_2\right] - t\left[\frac{1}{2}q_1q_2 + q_2^2\right]$$

$$= -t[q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2] \tag{4.6.6}$$

最后，将(4.6.2)、(4.6.4)和(4.6.6)代入(4.4.2)，我们得到 Lagrange 函数的表达式

$$L = \frac{1}{2}[q_1^2\dot{q}_1^2 + q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + q_2^2\dot{q}_2^2] - t(q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2) \tag{4.6.7}$$

2°Engels 第一方法。我们有

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= q_1^2\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_2 + q_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}q_1\dot{q}_2^2 \\ &\quad + t(2q_1 + q_2) \\ F_2 &= \frac{1}{2}q_1q_2\ddot{q}_1 + q_2^2\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_2^2 \\ &\quad + t(q_1 + 2q_2) \end{aligned}\right\} \tag{4.6.8}$$

将 A_{kl} 及(4.6.8)代入(4.5.2)，我们有

$$\begin{aligned} L(t,q,\dot{q}) = &-q_1\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left\{\tau^3q_1^2\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}\tau^3q_2q_1\ddot{q}_2 + \tau^3q_1\dot{q}_1^2\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\tau^3q_1\dot{q}_2^2 + t\tau(2q_1 + q_2)\right\} \\ &-q_2\int_0^1 \mathrm{d}\tau\left\{\frac{1}{2}\tau^3q_1q_2\ddot{q}_1 + \tau^3q_2^2\ddot{q}_2\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\tau^3q_2\dot{q}_1^2 + \tau^3q_2\dot{q}_2^2 + t\tau(q_1 + 2q_2)\right\} \\ &+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'\left\{\tau q_1(\tau^2q_1^2\dot{q}_1\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\tau^2q_1q_2\dot{q}_2) + \tau q_2\left(\frac{1}{2}\tau^2q_1q_2\dot{q}_1 + \tau^2q_2^2\dot{q}_2\right)\right\} \end{aligned}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}q_1q_2^2+q_1q_1^2+t(2q_1+q_2)\right\}-\left\{2q_1(\dot{q}_1-c_1)\dot{q}_1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}q_2(\dot{q}_2-c_2)\dot{q}_1+\frac{1}{2}q_1(\dot{q}_2-c_2)\dot{q}_2\right\} \quad (4.6.12)$$

$$\Gamma_2=B_2-\left(\frac{\partial T_2}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_2}\dot{q}_2\right)-\frac{\partial T_2}{\partial t}$$

$$=\left\{\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1^2+q_2\dot{q}_2^2+t(q_1+2q_2)\right\}-\left\{\frac{1}{2}q_2(\dot{q}_1-c_1)\dot{q}_1\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}q_1(\dot{q}_1-c_1)\dot{q}_2+2q_2(\dot{q}_2-c_2)\dot{q}_2\right\} \quad (4.6.13)$$

用(4.5.7)应有

$$\frac{\partial \Gamma_1}{\partial q_2}=\frac{\partial \Gamma_2}{\partial q_1}$$

即

$$t-\frac{1}{2}(\dot{q}_2-c_2)\dot{q}_1=t-\frac{1}{2}(\dot{q}_1-c_1)q_2$$

或者

$$c_2\dot{q}_1=c_1\dot{q}_2$$

因此有

$$c_1=c_2=0 \quad (4.6.14)$$

将(4.6.14)代入(4.6.12)和(4.6.13)，得到

$$\Gamma_1=-q_1\dot{q}_1^2-\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+t(2q_1+q_2) \quad (4.6.15)$$

$$\Gamma_2=-q_2\dot{q}_2^2-\frac{1}{2}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2+t(q_1+2q_2) \quad (4.6.16)$$

于是由(4.5.5)，有

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_1}=-\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \dot{q}_1}=2q_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_2\dot{q}_2 \quad (4.6.17)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_2}=-\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \dot{q}_1}=\frac{1}{2}q_1\dot{q}_2 \quad (4.6.18)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_1}=-\frac{\partial \Gamma_1}{\partial \dot{q}_2}=\frac{1}{2}q_2\dot{q}_1 \tag{4.6.19}$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_2}=-\frac{\partial \Gamma_2}{\partial \dot{q}_2}=2q_2\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_1\dot{q}_1 \tag{4.6.20}$$

由(4.6.17)、(4.6.18)解得

$$\Phi_1=q_1^2\dot{q}_1+\frac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_2 \tag{4.6.21}$$

由(4.6.19)、(4.6.20)解得

$$\Phi_2=q_2^2\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_1 \tag{4.6.22}$$

容易验证 (4.5.6) 得以满足。最后，将 (4.6.15)、(4.6.16)、(4.6.21)和(4.6.22)代入(4.5.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
L=&\int_{c_1}^{\dot{q}_1}(q_1^2\dot{q}_1+\frac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_2)\mathrm{d}\dot{q}_1\\
&+\int_{c_2}^{\dot{q}_2}(q_2^2\dot{q}_2+\frac{1}{2}q_1q_2c_1)\mathrm{d}\dot{q}_2\\
&-\int_{d_1}^{q_1}\{-q_1c_1^2-\frac{1}{2}q_2c_1c_2+t(2q_1+q_2)\}\mathrm{d}q_1\\
&-\int_{d_2}^{q_2}\{-q_2c_2^2-\frac{1}{2}\mathrm{d}_1c_1c_2+t(\mathrm{d}_1+2q_2)\}\mathrm{d}q_2\\
=&\frac{1}{2}q_1^2(\dot{q}_1^2-c_1^2)+\frac{1}{2}q_1q_2\dot{q}_2(\dot{q}_1-c_1)\\
&+\frac{1}{2}q_2^2(\dot{q}_2^2-c_2^2)+\frac{1}{2}q_1q_2c_1(\dot{q}_2-c_2)\\
&+\frac{1}{2}c_1^2(q_1^2-d_1^2)+\frac{1}{2}q_2c_1c_2(q_1-d_1)\\
&-t\{(q_1^2-d_1^2)+q_2(q_1-d_1)\}\\
&+\frac{1}{2}c_2^2(q_2^2-d_2^2)+\frac{1}{2}d_1c_1c_2(q_2-d_2)
\end{aligned}$$

$$-t\{d_1(q_2-d_2)+(q_2^2-d_2^2)\}$$

注意到(4.6.14)，上式可写成

$$L=\frac{1}{2}(q_1^2\dot{q}_1^2+q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+q_2^2\dot{q}_2^2)-t(q_1^2+q_1q_2+q_2^2)$$

$$+t(d_1^2+d_1d_2+d_2^2) \qquad (4.6.23)$$

在(4.6.23)中，最后一项不含 q，$\dot{q}$，因此可舍去，最终得到

$$L=\frac{1}{2}(q_1^2\dot{q}_1^2+q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2+q_2^2\dot{q}_2^2)$$

$$-t(q_1^2+q_1q_2+q_2^2) \qquad (4.6.24)$$

从以上三种计算看来，对这类二维系统，Engels 第一方法较为方便。

例 2 研究运动学形式方程

$$\ddot{q}+\gamma\dot{q}=0, \qquad \dot{q}>0 \qquad (4.6.25)$$

它表示质点在阻力作用下的一维运动。

这个方程是 C^∞ 类的、规则的，但是是非自伴随的。因此，对其直接解析表达的 Lagrange 函数不存在。然而，同样的运动方程可写成等价的自伴随的基本形式

$$A\ddot{q}+B\equiv e^{\gamma t}\ddot{q}+e^{\gamma t}\gamma\dot{q}=0 \qquad (4.6.26)$$

它满足定理 4.3.1 和 4.4.1 的全部条件。对于直接表达式

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}\right)_{SA}=[e^{\gamma t}(\ddot{q}+\gamma q)_{NSA}]_{SA} \qquad (4.6.27)$$

Lagrange 函数存在。在此情形下，方程(4.4.3)—(4.4.5)为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}^2}=e^{\gamma t}\\&\frac{\partial C}{\partial q}-\frac{\partial D}{\partial t}=-e^{\gamma t}\gamma\dot{q}-\frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (4.6.28)$$

而解(4.4.6)—(4.4.8)成为

$$\left.\begin{aligned} K&=\dot{q}\int_0^1 \mathrm{d}\tau' \left[\dot{q}\int_0^1 \mathrm{d}\tau \mathrm{e}^{\gamma t}\right](\tau' q) \\ &=\mathrm{e}^{\gamma t}\cdot\frac{1}{2}\dot{q}^2 \\ D&=C=0 \end{aligned}\right\} \tag{4.6.29}$$

我们得到 Lagrange 函数

$$L=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}\dot{q}^2 \tag{4.6.30}$$

例 3 已知三维系统的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} &(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{q}_3)\ddot{q}_2+\dot{q}_2\ddot{q}_3 \\ &\quad+\frac{1}{3}\left(q_2q_3-2q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_3+2q_2\dot{q}_2\right)=0 \\ &(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{q}_3)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2+\dot{q}_1\ddot{q}_3 \\ &\quad+\frac{1}{3}\left(2q_1\dot{q}_1-2q_2\dot{q}_1-q_1\dot{q}_3+q_1q_3\right)=0 \\ &\dot{q}_2\ddot{q}_1+\dot{q}_1\ddot{q}_2+\dot{q}_3\ddot{q}_3+\frac{1}{3}\left(\dot{q}_1q_2+q_1\dot{q}_2+q_1q_2\right)=0 \end{aligned}\right\} \tag{4.6.31}$$

试用 Engels 第一方法寻找 Lagrange 函数。

[解] 将(4.6.31)代入(4.5.2)，我们有

$$\begin{aligned} \ddot{L}=&-q_1\int_0^1 \mathrm{d}\tau\tau^2\Big\{(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{q}_3)\ddot{q}_2 \\ &+\dot{q}_2\ddot{q}_3+\frac{1}{3}\left(2q_2\dot{q}_2-2q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_3+q_2q_3\right)\Big\} \\ &-q_2\int_0^1 \mathrm{d}\tau\tau^2\Big\{(2\dot{q}_1+2\dot{q}_2+\dot{q}_3)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2 \\ &+\dot{q}_1\ddot{q}_3+\frac{1}{3}\left(2q_1\dot{q}_1-2q_2\dot{q}_1-q_1\dot{q}_3-q_1q_3\right)\Big\} \end{aligned}$$

$$-q_3\int_0^1 d\tau\tau^2\left\{\dot q_2\ddot q_1+\dot q_1\ddot q_2+\dot q_3\ddot q_3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(\dot q_1 q_2+q_1\dot q_2+q_1 q_2\right)\right\}$$

$$+\frac{d}{dt}\int_0^1\int_0^1 d\tau d\tau'\,[\{\tau\tau'(\dot q_1+2\dot q_2)\dot q_1$$

$$+\tau\tau'(2\dot q_1+2\dot q_2+\dot q_3)\dot q_2+\tau\tau'\dot q_2\dot q_3\}\tau q_1$$

$$+\{\tau\tau'(2\dot q_1+2\dot q_2+\dot q_3)\dot q_1+\tau\tau'(2\dot q_1+\dot q_2)\dot q_2$$

$$+\tau\tau'\dot q_1\dot q_3\}\tau q_2+\{\tau\tau'\dot q_2\dot q_1+\tau\tau'\dot q_1\dot q_2$$

$$+\tau\tau'\dot q_3^2\}\tau q_3]$$

$$=-\frac{1}{3}q_1\left\{(\dot q_1+2\dot q_2)\ \ddot q_1+(2\dot q_1+2\dot q_2+\dot q_3)\ \ddot q_2+\dot q_2\ddot q_3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(2q_2\dot q_2-2q_1\dot q_2-q_2\dot q_3+q_2 q_3\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{3}q_2\left\{(2\dot q_1+2\dot q_2+\dot q_3)\ \ddot q_1+(2\dot q_1+\dot q_2)\ \ddot q_2+\dot q_1\ddot q_3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(2q_1\dot q_1-2q_2\dot q_1-q_1\dot q_3+q_1 q_3\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{3}q_3\left\{\dot q_2\ddot q_1+\dot q_1\ddot q_2+\dot q_3\ \ddot q_3\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(\dot q_1 q_2+q_1\dot q_2+q_1 q_2\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{6}\frac{d}{dt}[\{(\dot q_1+2\dot q_2)\dot q_1+(2\dot q_1+2\dot q_2+\dot q_3)\dot q_2+\dot q_2\dot q_3\}q_1$$

$$+\{(2\dot q_1+2\dot q_2+\dot q_3)\dot q_1+(2\dot q_1+\dot q_2)\dot q_2+\dot q_1\dot q_3\}q_2$$

$$+\{2\dot q_1\dot q_2+\dot q_3^2\}q_3]$$

$$=\frac{1}{6}\left(\dot{q}_1^3+\dot{q}_2^3+\dot{q}_3^3\right)+\dot{q}_1^2\dot{q}_2+\dot{q}_1\dot{q}_2^2+\dot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3$$

$$+\frac{1}{9}\dot{q}_1q_2(-2q_1+2q_2-q_3)+\frac{1}{9}\dot{q}_2q_1(2q_1$$

$$-2q_2-q_3)+\frac{2}{9}q_1q_2\dot{q}_3-\frac{1}{3}q_1q_2q_3 \qquad (4.6.32)$$

习　　题

1. 试验证方程组

$$t\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+f_1(t,q,\dot{q})=0$$

$$\ddot{q}_1+\ddot{q}_2+f_2(t,q,\dot{q})=0$$

是规则的。

2. 已知一维系统的方程为

$$tq\dot{q}\ddot{q}+\frac{1}{2}q\dot{q}^2+\frac{1}{3}t\dot{q}^3+f(t,q)=0$$

其中 f 为 t,q 的任意可微函数，试证明方程为自伴随的。

3. 试证方程

$$\ddot{q}+t\dot{q}+q=0$$

为非自伴随的。

4. 试证一阶系统

$$F_1=(q_1+q_2)^2\dot{q}_2+tq_2=0$$

$$F_2=-(q_1+q_2)^2\dot{q}_1+tq_1=0$$

为自伴随的。

5. 试对非自伴随系统

$$\ddot{x}+\beta\dot{x}+\omega^2x=0 \qquad (\beta,\omega\text{ 为常数})$$

引进因子函数 $h=e^{\beta t}$，然后构造 Lagrage 函数。

6. 设力学系统的运动方程为

$$c_{ki}(t)\ddot{q}_i+\dot{c}_{ki}(t)\dot{q}_i+a_{ki}(t)q_i=0 \qquad (k=1,\cdots,n)$$

其中

$$c_{ki}=c_{ik}, \quad a_{ki}=a_{ik}$$

试构造系统的 Lagrange 函数。

7. 试用 Santilli 方法构造 §4.6 例 3 系统的 Lagrange 函数。

8. 试用 Santilli 方法和 Engels 第一方法构造二维非保守非线性系统

$$(\dot{q}_1+2\dot{q}_2)\ddot{q}_1+2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2+q_2\dot{q}_2-q_1\dot{q}_2+q_1q_2+\frac{1}{2}q_2^2=0$$

$$2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_1+(2\dot{q}_1+\dot{q}_2)\ddot{q}_2+q_1\dot{q}_1-q_2\dot{q}_1$$
$$+q_1q_2+\frac{1}{2}q_1^2=0$$

的 Lagrange 函数。

参 考 文 献

[1] Jacobi.C.G,Zur Theorie der Variationensrechnung und der Differentualgleichungen, 1837

[2] Helmholtz.H, J.Reine Angew.Math.100, 137, 1887.

[3] 梅凤翔，分析力学基础，北京工业学院，1983年。

[4] 梅凤翔，非完整系统力学基础，北京工业学院出版社，1985年。

[5] Santilli. R. M. , Foundations of Theoretical Mechanics, I, Springer-Verlag, 1978.

[6] Morse.P.M and Feshbach.H., Methods in Theoretical Physics, I, New York, 1953.

[7] Engels.E., Hadronic J.1, 465, 1978.

[8] Engels.E., Nuovo Cimento, 26B, 481.

第五章　刚体分析动力学

重刚体绕固定点运动问题是理论力学中最激起好奇心的问题之一，而寻求刚体动力学问题的精确解乃是分析力学的精华。

1758 年 Euler 建立了刚体动力学方程并给出刚体动力学的一般提法。从 1758 年至 1959 年，这二百年间得到了刚体绕固定点转动问题的十二种解，其中三种是通解，九种是特解。每一种解的发现没有普遍方法，主要靠研究者的技巧，并且在很大程度上带有偶然性质。

刚体动力学的新成就是在本世纪后半期以苏联学者 Харламов.П.В 为首一批研究者的贡献。根据已知积分将原始方程组降阶的问题很早就提出来了，但著名的方法归结为异常笨重的而因此实际上不适用的方程。Харламов 放弃传统的主轴，引出所谓专门坐标轴，新选的基本变量在此坐标轴中以自然方式建立，因此使降阶基本完成。Харламов 动力学方程是两个一阶方程。在对质量分布的一个限制下，Хрламова 将问题归结为一个积分微分方程。

§5.1　重刚体绕固定点运动方程

1. Euler-Poisson 方程　为描述重刚体绕固定点 o 的运动，引入固定系 $ox_1y_1z_1$(其中 oz_1 铅垂向上)以及动系 $oxyz$—它与刚体固联并沿对 o 的惯性主轴分布(图 5-1)。用 $\boldsymbol{k}_1=\gamma\boldsymbol{i}+\gamma'\boldsymbol{j}+\gamma''\boldsymbol{k}$ 表示沿轴 oz_1 的单位矢量，用 $\boldsymbol{P}$ 表示重力，$\boldsymbol{P}=-Mg\boldsymbol{k}_1$($M$ 为刚体质量，g 为重力加速度)。物体重心 G 的位置用矢径 $\boldsymbol{\rho}_G=x_G\boldsymbol{i}+y_G\boldsymbol{j}+z_G\boldsymbol{k}$ 来确定。

对 o 的动量矩定理给出

将此方程投影，得到三个标量方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\gamma}{dt}&=r\gamma'-q\gamma''\\ \frac{d\gamma'}{dt}&=p\gamma''-r\gamma\\ \frac{d\gamma''}{dt}&=q\gamma-p\gamma'\end{aligned}\right\}\qquad(5.1.7)$$

方程(5.1.7)称为 Poisson 方程。于是有对六个未知函数 p,q,r γ，γ',γ''的六个非线性微分方程(6.1.5)和(6.1.7)的封闭组，称为Euler-Poisson 方程。

类似于(5.1.6)，令$\boldsymbol{i}_1=\alpha\boldsymbol{i}+\alpha'\boldsymbol{j}+\alpha''\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}_1=\beta\boldsymbol{i}+\beta'\boldsymbol{j}+\beta''\boldsymbol{k}$，有

$$\frac{\tilde{d}\boldsymbol{i}_1}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}_1=0,\qquad \frac{\tilde{d}\boldsymbol{j}_1}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}_1=0,$$

因此得到两个方程组

$$\frac{d\alpha}{dt}=r\alpha'-q\alpha'',\qquad \frac{d\alpha'}{dt}=p\alpha''-r\alpha,$$

$$\frac{d\alpha''}{dt}=q\alpha-p\alpha',\qquad(5.1.8)$$

$$\frac{d\beta}{dt}=r\beta'-q\beta'',\qquad \frac{d\beta'}{dt}=p\beta''-r\beta,$$

$$\frac{d\beta''}{dt}=q\beta-p\beta'\qquad(5.1.9)$$

2. 在专门坐标轴中的运动方程 在刚体绕固定点运动问题中，除Euler-Poisson 方程外，也应用其他形式的运动方程，这些形式是利用其他坐标系和另外的变量而得到的。下面研究Харламов 提出的专门坐标轴中的方程。

取任意右手直角坐标系 $o\xi_1\xi_2\xi_3$，此系有单位矢量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 并固定在刚体上。在此坐标系中的动量矩为

$$K = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{5.1.10}$$

或

$$K = \omega(L)$$

其中

$$\omega = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 \tag{5.1.11}$$

$$(L) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \tag{5.1.12}$$

这里惯量张量(L)的分量满足条件$L_{ij}=L_{ji}$。分量L_{11}，L_{22}，L_{33}是对轴$o\xi_1$，$o\xi_2$，$o\xi_3$的惯性矩，而$L_{ij}(i\neq j)$为惯性积的反号。由(5.1.3)、(5.1.11)和(5.1.12)得到动量矩在$o\xi_1\xi_2\xi_3$上的投影为

$$x_i = L_{i1}\omega_1 + L_{i2}\omega_2 + L_{i3}\omega_3 \quad (i=1,2,3) \tag{5.1.13}$$

刚体的动能

$$T = \frac{1}{2}\int_M v^2 \mathrm{d}M$$

或

$$2T = \int_M v^2 \mathrm{d}M = \int_M \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}M = \int_M \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})\,\mathrm{d}M$$

$$= \int_M \boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}M = \boldsymbol{\omega}\cdot\int_M(\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}M$$

即

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{5.1.14}$$

由(5.1.11)、(5.1.13)和(5.1.14)，得

$$T = \frac{1}{2}\Big(L_{11}\omega_1^2 + L_{22}\omega_2^2 + L_{33}\omega_3^2 \quad \Big)$$

$$+ L_{23}\omega_2\omega_3 + L_{31}\omega_3\omega_1 + L_{12}\omega_1\omega_2 \tag{5.1.15}$$

因动能是正定二次形，故

$$T=\frac{1}{2}\left(l_{11}^{*}x_{1}^{*2}+l_{22}^{*}x_{2}^{*2}+l_{33}^{*}x_{3}^{*2}\right)+l_{23}^{*}x_{2}^{*}x_{3}^{*}$$

$$+l_{31}^{*}x_{3}^{*}x_{1}^{*}+l_{12}^{*}x_{1}^{*}x_{2}^{*} \tag{5.1.21}$$

其中 l_{ij}^{*} 容易用 l_{ij} 线性表出，特别地

$$l_{23}^{*}=\frac{1}{2}\left(l_{33}-l_{22}\right)\sin 2\alpha+l_{23}\cos 2\alpha \tag{5.1.22}$$

现在置

$$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2l_{23}}{l_{22}-l_{33}} \tag{5.1.23}$$

则 $l_{23}^{*}=0$，而动能取形式

$$T=\frac{1}{2}\left(l_{11}^{*}x_{1}^{*2}+l_{22}^{*}x_{2}^{*2}+l_{33}^{*}x_{3}^{*2}\right)$$

$$+(l_{31}^{*}x_{3}^{*}+l_{12}^{*}x_{2}^{*})x_{1}^{*} \tag{5.1.24}$$

假设物体重心 G 不与固定点 o 相重合，我们研究一坐标系 $o\eta_1\eta_2\eta_3$，它的轴 $o\eta_1$ 通过点 G，而轴 $o\eta_2$ 和 $o\eta_3$ 如此指向以使动能 T 有表达式(5.1.24)。称此坐标系为专门坐标系。利用此坐标系时，用 a,a_1,a_2,b_1,b_2 代替 $l_{11}^{*},l_{22}^{*},l_{33}^{*},l_{12}^{*},l_{13}^{*}$；用$x,y,z$ 代替 x_1^{*},x_2^{*},x_3^{*}；用 $\omega_x,\omega_y,\omega_z$ 代替 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$。于是，得到动能和角速度的表达式

$$T=\frac{1}{2}\left(ax^2+a_1y^2+a_2z^2\right)+(b_1y+b_2z)x \tag{5.1.25}$$

$$\omega_x=ax+b_1y+b_2z,\qquad \omega_y=a_1y+b_1x$$

$$\omega_z=a_2z+b_2x \tag{5.1.26}$$

利用(5.1.1)、(5.1.6)和(5.1.26)，可将重刚体绕固定点运动方程在专门坐标系中表示为[1, 2]

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= (a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= (a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\nu_3\Gamma \\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -(a-a_1)yx-(b_1y+b_2z)y \\
&\qquad +b_1x^2+\nu_2\Gamma
\end{aligned}\right\} \quad (5.1.27)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}t} &= (a_2z+b_2x)\nu_2-(a_1y+b_1x)\nu_3 \\
\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}t} &= (ax+b_1y+b_2z)\nu_3-(a_2z+b_2x)\nu_1 \\
\frac{\mathrm{d}\nu_3}{\mathrm{d}t} &= -(ax+b_1y+b_2z)\nu_2+(a_1y+b_1x)\nu_1
\end{aligned}\right\} \quad (5.1.28)
$$

其中 ν_1, ν_2, ν_3 为单位矢量 $\boldsymbol{k}_1$ 在专门坐标系轴上的投影，而 $\Gamma = -Mg\rho_G$。

方程(5.1.27)和(5.1.28)用于寻求重刚体绕固定点运动问题的特解。

§5.2 Euler 角 · 正则变量 · Despris变量

1. Euler 角 刚体在每一时刻在空间中的位置可用动系 $oxyz$ 相对固定系 $ox_1y_1z_1$ 的位置来确定，并且可用三个Euler角 ψ, θ, φ 给出。图 5-2 表明，章动角 θ 作为轴 oz 和 oz_1 夹角，自旋角 φ 作为节线 oJ 和轴 ox 间的夹角，进动角 ψ 作为轴 ox_1 和节线 oJ 间的夹角。令沿节线的单位矢量为 $\boldsymbol{e}$，则角速度矢量为

$$
\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\psi}\boldsymbol{k}_1 + \dot{\theta}\boldsymbol{e} \quad (5.2.1)
$$

将其投影到轴系 $oxyz$ 上，有

$$
\left.\begin{aligned}
p &= \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{i} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + \dot{\psi}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{i} \\
q &= \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{j} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + \dot{\psi}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{j} + \dot{\theta}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{j} \\
r &= \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{k} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + \dot{\psi}\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k} + \dot{\theta}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k}
\end{aligned}\right\} \quad (5.2.2)
$$

由轴的正交性得知

容易证明，此矩阵的行列式等于 1 。

现在用变量 $p,q,r,\gamma,\gamma',\gamma''$ 来表示 Euler 角。由(5.2.3)求得

$$\theta=\arccos\gamma'', \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\gamma'} \tag{5.2.6}$$

为求得 ψ 的表达式，将(5.2.4)前两个关系分别乘以 γ 和 γ'，然后相加，并注意到(5.2.3)，得到

$$\dot{\psi}=\frac{p\gamma+q\gamma'}{\gamma^2+\gamma'^2} \tag{5.2.7}$$

因此，如果求得 Euler-Poisson 方程的解 $p(t)$，$q(t)$，$r(t)$，$\gamma(t)$，$\gamma'(t)$，$\gamma''(t)$，那么可由(5.2.6)求得章动角 $\theta(t)$ 和自旋角 $\varphi(t)$ 的变化规律，而进动角 $\psi(t)$ 的变化规律由(5.2.7)求积分来确定。

这样，确定重刚体绕固定点运动规律的基本困难就是解 Euler-Poisson 方程。

2. 正则变量 θ，φ，ψ，p_θ，p_φ，p_ψ　取 Euler 角 θ,φ,ψ 为广义坐标，广义动量为

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}, \quad p_\varphi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}, \quad p_\psi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} \tag{5.2.8}$$

于是 θ，φ，ψ，p_θ，p_φ，p_ψ 构成重刚体绕固定点运动的正则变量组。

刚体的动能为

$$T=\frac{1}{2}\left(Ap^2+Bq^2+Cr^2\right) \tag{5.2.9}$$

利用(5.2.9)和(5.2 4)，我们有

$$\left.\begin{aligned}
p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = Ap\frac{\partial p}{\partial \dot\theta} + Bq\frac{\partial q}{\partial \dot\theta} + Cr\frac{\partial r}{\partial \dot\theta} \\
&= Ap\cos\varphi - Bq\sin\varphi \\
p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = Ap\frac{\partial p}{\partial \dot\varphi} + Bq\frac{\partial q}{\partial \dot\varphi} + Cr\frac{\partial r}{\partial \dot\varphi} \\
&= Cr \\
p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot\psi} = Ap\frac{\partial p}{\partial \dot\psi} + Bq\frac{\partial q}{\partial \dot\psi} + Cr\frac{\partial r}{\partial \dot\psi} \\
&= (Ap\sin\varphi + Bq\cos\varphi)\sin\theta + Cr\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.10}$$

由此解出 p，q，r，得到

$$\left.\begin{aligned}
Ap &= \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) + p_\theta\cos\varphi \\
Bq &= \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) - p_\theta\sin\varphi \\
Cr &= p_\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.11}$$

此外，利用公式

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{K} = Ap\boldsymbol{i} + Bq\boldsymbol{j} + Cr\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{e} = \cos\varphi\boldsymbol{i} - \sin\varphi\boldsymbol{j} \\
&\boldsymbol{k}_1 = \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{i} + \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}
\end{aligned}\right\} \tag{5.2.12}$$

由(5.2.10)，我们求得

$$p_\theta = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{e}, \quad p_\varphi = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k}, \quad p_\psi = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k}_1 \tag{5.2.13}$$

3. Despris 正则变量 在某些情形，利用 Despris 正则变量是很方便的。Despris 正则变量是角 l，φ_2，φ_3 以及与之相应的广义动量 L, I_2，I_3。在图 5-3 上，$ox_1y_1z_1$ 是固定坐标系，$oxyz$ 是动坐标系，其轴指向刚体惯性主轴。建立动量矩矢量 $\boldsymbol{K}$ 并引出与之相垂直的平面 oMN。此平面与固定平面 x_1oy_1 交于 oM，而与动平面 xoy 交于 oN。取 l，φ_2，φ_3(图 5-3)为广义坐标。这些角的变化率 $\dot l$，$\dot\varphi_2$ 和 $\dot\varphi_3$ 分别指向轴 oz、矢量 $\boldsymbol{K}$ 和轴 oz_1。令 $\boldsymbol{K}$ 向单位矢量为 s，我们有

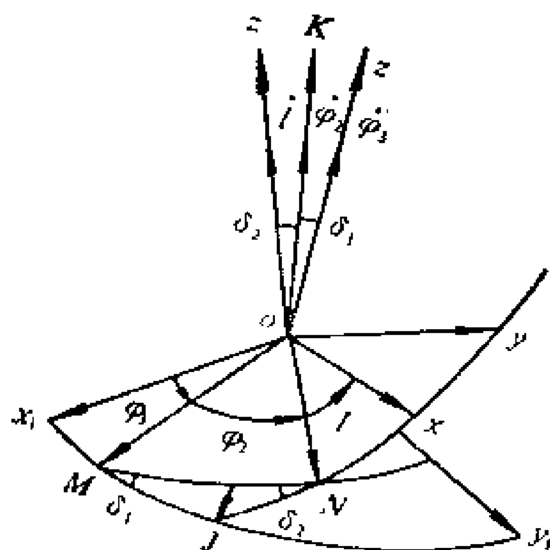


图5-3

$$\omega = \dot{l}\,\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}_2 \boldsymbol{s} + \dot{\varphi}_3 \boldsymbol{k}_1 \tag{5.2.14}$$

将其投影到轴系 $oxyz$ 上，得到

$$\left.\begin{aligned} p &= \omega\cdot\boldsymbol{i} = \dot{l}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}_2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{i} + \dot{\varphi}_3\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{i} \\ q &= \omega\cdot\boldsymbol{j} = \dot{l}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}_2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}_3\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{j} \\ r &= \omega\cdot\boldsymbol{k} = \dot{l}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}_2\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{k} + \dot{\varphi}_3\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \tag{5.2.15}$$

进而，相应于角 l，φ_2，φ_3，引进广义动量 L，I_2，I_3

$$L = \frac{\partial T}{\partial \dot{l}},\qquad I_2 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2},\qquad I_3 = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} \tag{5.2.16}$$

利用(5.2.9)、(5.2.12)和(5.2.15)，得到

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} = Ap\frac{\partial p}{\partial \dot{l}} + Bq\frac{\partial q}{\partial \dot{l}} + Cr\frac{\partial r}{\partial \dot{l}} \\ &= (Ap\boldsymbol{i} + Bq\boldsymbol{j} + Cr\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k} \\ I_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} = \boldsymbol{K}\cdot \mathbf{s} = K \\ I_3 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_3} = \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k}_1 \end{aligned}\right\} \tag{5.2.17}$$

由此可见，广义动量L和I_3分别为动量矩在轴oz和轴oz_1上的投影，而广义动量I_2等于动量矩矢量的大小。因此，再引进动量矩矢量$\boldsymbol{K}$与轴oz_1和oz的夹角δ_1和δ_2，我们得到

$$I_3 = I_2\cos\delta_1, \quad L = I_2\cos\delta_2 \tag{5.2.18}$$

如果固定轴ox_1和oz_1分别沿oM和矢量K，那么角δ_2、φ_2和l将是章动角、进动角和自旋角。由(5.2.18)得知，已知广义动量L，I_2和I_3，可以确定辅助平面oMN对基本平面ox_1y_1和oxy的倾角。

由(5.2.13)、(5.2.17)以及图5-2和图5-3，可求得广义动量p_θ，p_φ，p_ψ与L，I_2，I_3之间的关系

$$p_\psi = I_3,\quad p_\varphi = L,\quad p_\theta = I_2\sin\delta_2\sin(l-\varphi) \tag{5.2.19}$$

现在求刚体动能在Despris变量中的表达式。由(5.2.9)，有

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{K_x^2}{A} + \frac{K_y^2}{B} + \frac{K_z^2}{C}\right) \tag{5.2.20}$$

其中

$$K_x = Ap,\quad K_y = Bq,\quad K_z = Cr \tag{5.2.21}$$

为动量矩矢量$\boldsymbol{K}$在动轴$oxyz$上的投影。用$\boldsymbol{K}_{xy}$表记矢量$\boldsymbol{K}$在平面oxy上的投影，它与轴ox成角$\pi/2-l$，其模为

$$K_{xy} = \sqrt{I_2^2 - L^2} \tag{5.2.22}$$

因此

$$K_x = K_{xy}\sin l, \qquad K_y = K_{xy}\cos l \tag{5.2.23}$$

由(5.2.17)知

$$K_z = L \tag{5.2.24}$$

于是动能在 Despris 变量中的表达式为

$$T=\frac{1}{2}\left(I_2^2-L^2\right)\left(\frac{\sin^2 l}{A}+\frac{\cos^2 l}{B}\right)+\frac{1}{2}\frac{L^2}{C} \tag{5.2.25}$$

最后，我们来证明 Despris 变量是正则变量。进而证明，存在齐次正则变换将 Euler 相空间$(\theta,\varphi,\psi,p_\theta,p_\varphi,p_\psi)$引向 Despris 相空间$(l,\varphi_2,\varphi_3,L,I_2,I_3)$。为证明这一结论，首先求图 5-4 所示球面三角形边与角之间的关系。由球面三角知识，有

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \tag{5.2.26}$$

$$\begin{aligned}\sin a\cos B&=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A\\ \sin a\cos C&=\cos c\sin b-\sin c\cos b\cos A\end{aligned} \tag{5.2.27}$$

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin C}{\sin c} \tag{5.2.28}$$

将(5.2.26)两端求微分，得

$$\begin{aligned}-\sin a\,\mathrm{d}a=&-(\sin b\cos c-\cos b\sin c\cos A)\mathrm{d}b\\ &-(\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A)\mathrm{d}c-\sin b\sin c\sin A\,\mathrm{d}A\end{aligned}$$

由此利用(5.2.27)，得到

$$\mathrm{d}a=\cos C\mathrm{d}b+\cos B\mathrm{d}c+\frac{\sin b\sin c\sin A}{\sin a}\mathrm{d}A$$

再利用(5.2.28)，得

$$\mathrm{d}a=\cos C\mathrm{d}b+\cos B\mathrm{d}c+\sin b\sin C\mathrm{d}A \tag{5.2.29}$$

现在研究图 5-3 上的球面三角形 MNJ，由图 5-2 和图 5-3 所得此球面三角形的边和角值表示在图 5-5 上。将此球面三角形的相应元素代入(5.2.29)，我们得到关系

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi_2=&\cos\delta_2\mathrm{d}(\varphi-l)+\cos\delta_1\mathrm{d}(\psi-\varphi_3)\\ &-\sin(\varphi-l)\sin\delta_2\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

将其两端乘以 I_2，并利用(5.2.18)和(5.2.19)，最终得到

$$L\mathrm{d}l+I_2\mathrm{d}\varphi_2+I_3\mathrm{d}\varphi_3=p_\theta\mathrm{d}\theta+p_\varphi\mathrm{d}\varphi+p_\psi\mathrm{d}\psi \tag{5.2.31}$$

由此得知，变换$(\theta,\varphi,\psi,p_\theta,p_\varphi,p_\psi)\to(l,\varphi_2,\varphi_3,L,I_2,I_3)$是齐次正则变换。

其次，将变量γ，γ'，γ''用Despris变量表出。利用对图5-4的球面三角公式

$$\left.\begin{aligned}&\sin A\cos b=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos a\\&\sin A\sin b=\sin B\sin a\\&\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\end{aligned}\right\}\qquad(5.2.37)$$

先求γ及γ'。为此，将(5.2.37)第一式乘以$\sin l$，第二式乘以$\cos l$，然后相加，得

$$\sin A\sin(b+l)=\sin l\cos B\sin C+\sin l\sin B\cos C\cos a+\cos l\sin B\sin a\qquad(5.2.38)$$

再将(5.2.37)第一式乘以$\cos l$，第二式乘以$-\sin l$，然后相加，得

$$\sin A\cos(b+l)=\cos l\cos B\sin C+\cos l\cos C\sin B\cos a-\sin l\sin B\sin a\qquad(5.2.39)$$

最后，将三角形MNJ(图5-5)的相应元素代入(5.2.38)和(5.2.39)，并利用表达式(5.2.3)，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\gamma=\sin\theta\sin\varphi=\sin l\cos\delta_1\sin\delta_2\\&\quad+\sin l\sin\delta_1\cos\delta_2\cos\varphi_2+\cos l\sin\delta_1\sin\varphi_2\\&\gamma'=\sin\theta\cos\varphi=\cos l\cos\delta_1\sin\delta_2\\&\quad+\cos l\sin\delta_1\cos\delta_2\cos\varphi_2-\sin l\sin\delta_1\sin\varphi_2\end{aligned}\right\}\qquad(5.2.40)$$

为确定γ''，利用(5.2.37)第三式，先将其两边乘以-1，并用图5-5上三角形MNJ的元素代替图5-4所示三角形的元素。据(5.2.3)最后一个关系，得到

$$\gamma''=\cos\theta=\cos\delta_1\cos\delta_2-\sin\delta_1\sin\delta_2\cos\varphi_2\qquad(5.2.41)$$

将(5.2.40)和(5.2.41)中角δ_1用由公式(5.2.18)的相应关系替代最终得到

$$
\left.\begin{aligned}
\gamma &= \frac{I_3}{I_2}\sin\delta_2\sin l+\sqrt{1-\frac{I_3^2}{I_2^2}}\cos\delta_2\sin l\cos\varphi_2 \\
&\quad +\sqrt{1-\frac{I_3^2}{I_2^2}}\cos l\sin\varphi_2 \\
\gamma' &= \frac{I_3}{I_2}\sin\delta_2\cos l+\sqrt{1-\frac{I_3^2}{I_2^2}}\cos\delta_2\cos l\cos\varphi_2 \\
&\quad -\sqrt{1-\frac{I_3^2}{I_2^2}}\sin l\sin\varphi_2 \\
\gamma'' &= \frac{I_3}{I_2}\cos\delta_2-\sqrt{1-\frac{I_3^2}{I_2^2}}\sin\delta_2\cos\varphi_2 \\
&\quad \left(\cos\delta_2=\frac{L}{I_2}\right)
\end{aligned}\right\}
\tag{5.2.42}
$$

§5.3 第一积分 运动方程的降阶

1. Euler-Poisson 方程的第一积分 将Euler-Poisson 方程(5.1.5)和(5.1.7)写成以下形式

$$
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=p,\quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=Q,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=R,\quad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\Gamma
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\mathrm{d}t}=\Gamma',\quad \frac{\mathrm{d}\gamma''}{\mathrm{d}t}=\Gamma'' \tag{5.3.1}
$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
&p=\{Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'')-(C-B)qr\}A^{-1} \\
&Q=\{Mg(x_G\gamma''-Z_G\gamma)-(A-C)rp\}B^{-1} \\
&R=\{Mg(y_G\gamma-x_G\gamma')-(B-A)pq\}C^{-1} \\
&\Gamma=r\gamma'-q\gamma'',\ \Gamma'=p\gamma''-r\gamma,\ \Gamma''=q\gamma-p\gamma'
\end{aligned}\right\} \tag{5.3.2}
$$

方程组(5.3.1)可表为形式

$$\frac{\mathrm{d}p}{P}=\frac{\mathrm{d}q}{Q}=\frac{\mathrm{d}r}{R}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\Gamma}=\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\Gamma'}=\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\Gamma''}=\mathrm{d}t \qquad (5.3.3)$$

方程(5.3.1)的右边部分(5.3.2)以及它们对p，q，r，γ，γ'，γ''的偏导数，在相应六维空间的任意有界闭域D上连续地依赖于所有变量。因此，在任何这样的区域D上，Euler-Poisson方程总有六个独立的第一积分，这对解方程(5.1.5)和(5.1.7)是足够了。但是可以证明，为了解 Euler-Poisson 方程只要找到五个不依赖于时间的第一积分就足够了。实际上，由(5.3.2)得知，表达式P，Q，R，Γ，Γ'，Γ''不显含时间t，那么五个方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{P}=\frac{\mathrm{d}q}{Q}=\frac{\mathrm{d}r}{R}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\Gamma}=\frac{\mathrm{d}\gamma'}{\Gamma'}=\frac{\mathrm{d}\gamma''}{\Gamma''} \qquad (5.3.4)$$

可各自独立地积分。例如，积分方程组(5.3.4)之后，可将变量q，r，γ，γ'，γ''表为变量p的函数，再将所得函数代入P的表达式，得到$P=P_1(p)$。这时，由(5.3.3)得到方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{P_1(p)}=\mathrm{d}t \qquad (5.3.5)$$

将其积分，我们有

$$t=\int\frac{\mathrm{d}p}{P_1(p)} \qquad (5.3.6)$$

将此积分得到的$p(t)$代入上面所指对变量q，r，γ，γ'，γ''的表达式，我们得到方程组(5.3.3)的解。因此，为完全积分 Euler-Poisson 方程，只要求得不包含时间的五个独立的第一积分，并且计算(5.3.6)。求积分(5.3.6)没有原则的困难，而寻求不含时间的五个独立的第一积分却是基本困难。

已知 Euler-Poisson 方程的三个不含时间的独立的第一积分，有

(1) 能量积分

$$T-U=h$$

这里T为动能，由(5.2.9)确定，而

$$U=-MgZ_{1G} \tag{5.3.7}$$

为力函数，且

$$Z_{1G}=\boldsymbol{\rho}_G\cdot\boldsymbol{k}_1=x_G\gamma+y_G\gamma'+z_G\gamma'' \tag{5.3.8}$$

于是能量积分在轴系$oxyz$中有形式

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Mg(x_G\gamma+y_G\gamma'+Z_G\gamma'')=c_1 \tag{5.3.9}$$

其中 $c_1=2h$。

(2) 面积积分

$$K_{c_1}=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k}_1=c_2$$

其中$\boldsymbol{K}$为刚体动量矩矢量，由公式(5.1.4)最后一式确定。面积积分在轴系$oxyz$中有形式

$$Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=c_2 \tag{5.3.10}$$

(3) 平凡积分，余弦积分(几何积分)

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1 \qquad (c_3=1) \tag{5.3.11}$$

在专门坐标系中的运动方程(5.1.27)和(5.1.28)存在类似的第一积分，可表为

$$\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-\nu_1\Gamma=E \tag{5.3.12}$$

$$x\nu_1+y\nu_2+z\nu_3=m_1 \tag{5.3.13}$$

$$\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1 \tag{5.3.14}$$

其中E和m_1是任意常数。

这样，为完全地积分Euler-Poisson方程，还必须再找到两个不含时间的第一积分。但是，正如下面§5.4中将要证明的，为

此目的只要再找到一个不依赖于时间的第一积分。

需要注意，在积分(5.3.11)中的任意常数等于1。因此，Euler–Poisson方程的通解仅包含五个任意常数。在一般情形中，刚体绕固定点运动应由六个任意初始条件确定，例如给出Euler角及其一阶导数的初值θ_0，φ_0，ψ_0，$\dot{\theta}_0$，$\dot{\varphi}_0$，$\dot{\psi}_0$。在此情形，第六个任意常数在积分方程(5.2.7)时出现。

2. 运动方程的降阶 由微分方程理论知道，原始微分方程组的阶可以降低的数目等于求得的第一积分数目。因此，在刚体运动问题中，本是六阶的且有三个独立的第一积分(5.3.9)、(5.3.10)和(5.3.11)的Euler–Poisson方程，可以引向三阶系统。

利用矢量形式的Euler–Poisson方程(5.1.1)、(5.1.6)以及第一积分(5.3.9)—(5.3.11)消去矢量$\boldsymbol{k}_1$，就能完成降阶。实际上，据(5.3.7)和(5.3.8)，三个第一积分可写成形式

$$T-\boldsymbol{\rho}_G\cdot\boldsymbol{p}=h,\ \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k}_1=c_2,\ \boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_1=1 \qquad (5.3.15)$$

为消去矢量$\boldsymbol{k}_1$，将方程(5.1.1)右乘矢量$\boldsymbol{\rho}_G$，并利用矢量双重积公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \qquad (5.3.16)$$

得到关系

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)\times\boldsymbol{\rho}_G=\boldsymbol{P}\rho_G^2-\boldsymbol{\rho}_G(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\rho}_G) \qquad (5.3.17)$$

将由(5.3.15)第一式确定的标积$\boldsymbol{\rho}_G\cdot\boldsymbol{P}$代入上式，得到

$$-Mg\rho_G^2\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{\rho}_G(T-h)+\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)\times\boldsymbol{\rho}_G \qquad (5.3.18)$$

将由(5.3.18)确定的$\boldsymbol{k}_1$代入(5.3.15)的后两式，得到两个标量方程

$$(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\rho}_G)(T-h)+\boldsymbol{K}\cdot\left\{\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)\times\boldsymbol{\rho}_G\right\}=-Mg\rho_G^2c_2 \qquad (5.3.19)$$

$$\left\{\boldsymbol{\rho}_G(T-h)+\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)\times\boldsymbol{\rho}_G\right\}^2=(Mg)^2\,\rho_G^4 \tag{5.3.20}$$

第三个标量方程由方程(5.1.1)右边与矢量$\boldsymbol{\rho}_G$的正交性条件得到

$$\boldsymbol{\rho}_G\cdot\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)=0 \tag{5.3.21}$$

现在简化方程(5.3.19)和(5.3.20)。利用矢量混合积的性质

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) \tag{5.3.22}$$

容易将方程(5.3.19)引向形式

$$\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)\cdot(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\rho}_G)-(T-h)(\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\rho}_G)=Mg\rho_G^2c_2 \tag{5.3.23}$$

注意到方程(5.3.21)以及由此得出的关系

$$\left|\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)\times\boldsymbol{\rho}_G\right|=\left|\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right|\left|\boldsymbol{\rho}_G\right|$$

在消去ρ_G^2之后，可将(5.3.20)引向形式

$$\left(\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}\right)^2+(T-h)^2=(Mg)^2\rho_G^2 \tag{5.3.24}$$

这样求得的方程(5.3.21)、(5.3.23)和(5.3.24)已经不再含矢量$\boldsymbol{k}_1$，而可用来确定量p，q，r。

现在在轴系$oxyz$中写出这些方程。利用§5.1中的公式

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{K}&=Ap\boldsymbol{i}+Bq\boldsymbol{j}+Cr\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{\omega}&=p\boldsymbol{i}+q\boldsymbol{j}+r\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{\rho}_G&=x_G\boldsymbol{i}+y_G\boldsymbol{j}+z_G\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{5.3.25}$$

结果得到

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Apx_G+Bqy_G+Crz_G)+x_G(C-B)qr \\
&\qquad +y_G(A-C)rp+z_G(B-A)pq=0 \\
&(Bz_Gq-Cy_Gr)\left\{A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(C-B)qr\right\} \\
&+(Cx_Gr-Az_Gp)\left\{B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(A-C)rp\right\} \\
&+(Ay_Gp-Bx_Gq)\left\{C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(B-A)pq\right\} \\
&+\left\{h-\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)\right\} \\
&\qquad\cdot(Apx_G+Bqy_G+Crz_G) \\
&\qquad =Mg(x_G^2+y_G^2+z_G^2)c_2 \\
&\left\{A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(C-B)qr\right\}^2+\left\{B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(A-C)rp\right\}^2 \\
&\qquad +\left\{C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(B-A)pq\right\}^2 \\
&\qquad +\left\{\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-h\right\}^2 \\
&\qquad =(Mg)^2(x_G^2+y_G^2+z_G^2)
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.3.26}
$$

将(5.3.18)投影到轴系$oxyz$上，我们得到γ，γ'，γ''用p，q，r表示的表达式

$$
\begin{aligned}
&-Mg(x_G^2+y_G^2+z_G^2)\gamma=Bz_G\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}-Cy_G\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \\
&\qquad +\{(A-C)z_G+(A-B)y_Gq\}p \\
&\qquad +x_G\left\{\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-h\right\} \\
&-Mg(x_G^2+y_G^2+z_G^2)\gamma'=Cx_G\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}-Az_G\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\{(B-A)x_G p+(B-C)z_G r\}q \\
&+y_G\left\{\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-h\right\} \\
-Mg(x_G^2+y_G^2+z_G^2)\gamma''&=Ay_G\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-Bx_G\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\
&+\{(C-B)y_G q+(C-A)x_G p\} \\
&+z_G\left\{\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)-h\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (5.3.27)
$$

这样，我们完成了降阶的目的。然而，方程(5.3.26)的形式非常复杂，以致不能解出$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，因此利用起来极其困难。因此，将Euler-Poisson方程引向其他形式的三个方程常常是可取的。在这一领域内的重要结果是Hess，Харламов.П.В和Харламова.Е.И的工作。

3．Hess方程　Hess降阶Euler-Poisson方程的基本思想是由三个第一积分消去γ，γ'，γ''。为此，将积分(5.3.9)—(5.3.11)改写为

$$
\left.\begin{aligned}
&\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1 \\
&Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=c_2 \\
&x_G\gamma+y_G\gamma'+z_G\gamma'' \\
&=-\frac{1}{2Mg}(Ap^2+Bq^2+Cr^2-c_1)=\mu
\end{aligned}\right\} \quad (5.3.28)
$$

由此解出γ，γ'，γ''，并将所得结果代入Euler方程(5.1.5)，从而完成降价的目的。

为避免解非线性方程，Hess采用矢量代数方法。利用(5.3.25)，将(5.3.28)改写为

$$
\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_1=1,\ \mathbf{K}\cdot\boldsymbol{k}_1=c_2;\ \boldsymbol{\rho}_G\cdot\boldsymbol{k}_1=\mu \quad (5.3.29)
$$

其中$\boldsymbol{k}_1=\gamma\boldsymbol{i}+\gamma'\boldsymbol{j}+\gamma''\boldsymbol{k}$。引进记号

$$
\mathbf{N}=\mathbf{K}\times\boldsymbol{\rho}_G,\ \nu=\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\rho}_G,\ \varkappa=\boldsymbol{k}_1\cdot\mathbf{N} \quad (5.3.30)
$$

并研究矢量N和k_1的矢积。由(5.3.16)、(5.3.29)和(5.3.30)，得到

$$N \times k_1 = (K \times \rho_G) \times k_1 = \rho_G(K \cdot k_1) - K(\rho_G \cdot k_1)$$
$$= c_2 \rho_G - \mu K \qquad (5.3.31)$$

将等式(5.3.31)两端右乘N，得到

$$(N \times k_1) \times N = c_2(\rho_G \times N) - \mu(K \times N) \qquad (5.3.32)$$

按公式(5.3.16)和(5.3.30)，有

$$\left.\begin{aligned} K \times N &= K \times (K \times \rho_G) = K\nu - \rho_G K^2 \\ \rho_G \times N &= \rho_G \times (K \times \rho_G) = K\rho_G^2 - \rho_G \nu \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.33)$$

将(5.3.33)代入(5.3.32)，得到

$$(N \times k_1) \times N = \rho_G(\mu K^2 - c_2 \nu) + K(c_2 \rho_G^2 - \mu\nu) \qquad (5.3.34)$$

此表达式左边又可写成

$$(N \times k_1) \times N = k_1 N^2 - N(k_1 \cdot N) \qquad (5.3.35)$$

将(5.3.35)代入(5.3.34)，得

$$k_1 N^2 = N\varkappa + \rho_G(\mu K^2 - c_2 \nu) + K(c_2 \rho_G^2 - \mu\nu)$$
$$(5.3.36)$$

为由此通过不依赖于ν，ν'，ν''的量来确定矢量k_1，尚需求表达式$k_1 \cdot N$。

将(5.3.36)两端标乘矢量k_1并利用关系(5.3.29)，得到 $k_1 \cdot N = \varkappa$ 的表达式

$$\varkappa^2 = N^2 - (\mu K - c_2 \rho_G)^2 \qquad (5.3.37)$$

其中 $N^2 = (\rho_G \times K)^2$借助关系

$$(a \times b)^2 = a^2 b^2 - (a \cdot b)^2 \qquad (5.3.38)$$

可表为

$$N^2 = \rho_G^2 K^2 - \nu^2 \qquad (5.3.39)$$

利用关系

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}K^2}{\mathrm{d}t}=-Mgz \qquad (5.3.50)$$

或者写成

$$\left(\frac{1}{2Mg}\frac{\mathrm{d}K^2}{\mathrm{d}t}\right)^2=\begin{vmatrix} 1 & c_2 & \mu \\ c_2 & K^2 & \nu \\ \mu & \nu & \rho_G^2 \end{vmatrix} \qquad (5.3.51)$$

其次，将(5.1.1)两端标乘$\boldsymbol{\rho}_G$，注意到$(\boldsymbol{\rho}_G\times\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{\rho}_G=0$，利用表记(5.3.30)，我们得到方程

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\rho}_G\cdot(\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\omega}) \qquad (5.3.52)$$

据(5.3.40)，可表为形式

$$\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}\right)^2=\begin{vmatrix} \rho_G^2 & \nu & \sigma \\ \nu & K^2 & 2T \\ \sigma & 2T & \omega^2 \end{vmatrix} \qquad (5.3.53)$$

在此引入记号

$$\left.\begin{aligned} &\sigma=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_G=px_G+qy_G+rz_G \\ &\omega^2=p^2+q^2+r^2 \\ &2T=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{\omega}=Ap^2+Bq^2+Cr^2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.54)$$

最后，为得到第三个方程，将(5.1.6)两端标乘$\boldsymbol{\rho}_G$，利用表记(5.3.28)以及关系$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{\rho}_G=-\boldsymbol{k}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_G)$，我们求得

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{k}_1\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_G) \qquad (5.3.55)$$

将(5.3.42)代入上式，并注意到$\boldsymbol{\rho}_G\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_G)=0$，得到

$$\begin{aligned}(\rho_G^2K^2-\nu^2)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=&\varkappa\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_G)\\ &+(c_2\rho_G^2-\mu\nu)\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_G)\end{aligned} \qquad (5.3.56)$$

注意到公式

$$x_G(B-C)qr+y_G(C-A)pr+z_G(A-B)pq=0 \tag{5.3.60}$$

时，Hess方程的解不给出 Euler-Poisson方程的解。

4. **Харламов 方程** 现在利用专门坐标轴系 $o\eta_1\eta_2\eta_3$ 中的第一积分(5.3.12)—(5.3.14)来降阶专门坐标轴中的运动方程(5.1.27)、(5.1.28)。由(5.1.27)后两个方程及积分(5.3.12)表示量ν_1，ν_2，ν_3，有

$$\left.\begin{aligned}
\nu_1\Gamma&=\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\\
\nu_2\Gamma&=(a-a_1)yx+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\
\nu_3\Gamma&=(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}\right\} \tag{5.3.61}$$

将(5.3.61)代入其余两个第一积分(5.3.13)和(5.3.14)，得到方程

$$\left.\begin{aligned}
&y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+(b_1y+b_2z)(y^2+z^2)\\
&\quad+x\left\{\left(a-\frac{a_1}{2}\right)y^2+\left(a-\frac{a_2}{2}\right)z^2\right\}\\
&\quad+\frac{1}{2}ax^3-Ex-m=0\quad(m=\Gamma m_1)\\
&\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2\\
&+\left\{(a-a_1)yx+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right\}^2\\
&+\left\{(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right\}^2\\
&-\Gamma^2=0
\end{aligned}\right\} \tag{5.3.62}$$

这些方程与(5.1.27)的第一个方程

$$\frac{dx}{dt}=(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x \qquad (5.3.63)$$

一起组成对x，y，z的封闭方程组。由方程(5.3.62)借助方程(5.3.63)消去时间t，我们最终得到两个一阶方程

$$\left.\begin{aligned}
&\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\left(y\frac{dz}{dx}-z\frac{dy}{dx}\right)\\
&+(b_1y+b_2z)(y^2+z^2)+x\left\{\left(a-\frac{a_1}{2}\right)y^2\right.\\
&\left.+\left(a-\frac{a_2}{2}\right)z^2\right\}+\frac{1}{2}ax^3-Ex-m=0\\
&[(a-a_1)xy+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2\\
&+\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\frac{dz}{dx}]^2\\
&+[(a-a_2)xz+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2\\
&+\{(a_1-a_2)yz+(b_1z-b_2y)x\}\frac{dy}{dx}]^2\\
&+\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)\right.\\
&\left.+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2-\Gamma^2=0
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.64)$$

由这些方程确定$y(x)$和$z(x)$，并将所得关系代入$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$的公式，我们求得

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1\Gamma&=\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\\
\boldsymbol{v}_2\Gamma&=(a-a_1)yx+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2\\
&\qquad+\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\frac{dz}{dx}\\
\boldsymbol{v}_3\Gamma&=(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)-b_2x^2\\
&\qquad+\{(a_1-a_2)yz+(b_1z-b_2y)x\}\frac{dy}{dx}
\end{aligned}\right\}$$

(5.3.65)

x与t之间的关系为

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{(a_2-a_1)y(x)z(x)+b_2xy(x)-b_1xz(x)}$$

(5.3.66)

方程(5.3.64)仅在条件$x\neq$const时才是对的，因此，在其中$x=$const的解应单独研究。

这样，确定刚体运动的基本复杂性在于积分方程(5.3.64)。由这些方程可解出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$及$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，并表为两个一阶微分方程

$$\left.\begin{aligned}&(y^2+z^2)\{(a_2-a_1)yz+(b_2y-b_1z)x\}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\&=(y^2+z^2)\{(a-a_2)zx+(b_1y+b_2z)z-b_2x^2\}\\&\quad+xz\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}\\&\quad-mz+yR\\&(y^2+z^2)\{(a_1-a_2)yz+(b_1z-b_2y)x\}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\\&=(y^2+z^2)\left\{(a-a_1)xy+(b_1y+b_2z)y-b_1x^2\right\}\\&\quad+xz\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}\\&\quad-my-zR\end{aligned}\right\}$$

(5.3.67)

其中

$$R^2=(y^2+z^2)\Gamma^2+2mx\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}-(x^2+y^2+z^2)\cdot\left\{\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+(b_1y+b_2z)x-E\right\}^2-m^2$$

(5.3.68)

方程(5.3.67)称为Харламов方程。这两个方程还可归并为一个二阶方程

$$f_1\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left\{f_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+f_3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+f_4\frac{dy}{dx}+f_5\right\}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+f_6\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+f_7\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+f_8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+f_9\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+f_{10}\frac{dy}{dx}$$

$$+f_{11}=0 \tag{5.3.69}$$

其中f_i为x，y的已知多项式。我们注意到，在Euler角θ，φ，ψ中的Euler-Poisson方程也可引向一个二阶方程

$$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=f\left(\theta,\ \varphi,\ \frac{d\varphi}{d\theta}\right) \tag{5.3.70}$$

但它的右边有非常复杂的形式。

5. 归结为一个积分微分方程 在专门坐标轴中的一个，例如第三个轴，是惯性主轴的条件下，即当

$$b_2=0 \tag{5.3.71}$$

时，Харламова.Е.И证明，刚体运动问题可归为一个比较简单的一类积分微分方程。

在$b_2=0$的条件下，利用六个方程(5.1.27)和(5.1.28)中的四个：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-z\{(a_1-a_2)y+b_1x\}\\ \frac{dy}{dt}&=z\{(a-a_2)x+b_1y\}-\nu_3\Gamma\end{aligned}\right\} \tag{5.3.72}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\nu_1}{dt}-a_2z\nu_2&=-(a_1y+b_1x)\nu_3\\ \frac{d\nu_2}{dt}+a_2z\nu_1&=(ax+b_1y)\nu_3\end{aligned}\right\} \tag{5.3.73}$$

以及两个第一积分(5.3.12)和(5.3.13)：

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(ax^2+a_1y^2+a_2z^2)+b_1xy-\nu_1\Gamma=E \\ x\nu_1+y\nu_2+z\nu_3=m_1\end{array}\right\} \quad (5.3.74)$$

由(5.3.72)消去时间 t，得到量ν_3的表达式

$$\nu_3\Gamma=z\left[(a-a_2)x+b_1y+\{(a_1-a_2)y+b_1x\}\frac{dy}{dx}\right] \quad (5.3.75)$$

其中 x现在起独立变量作用。像在推导方程(5.3.64)一样，舍去特解$x=\text{const}$。注意到(5.3.75)方括号内的项是某函数 $Y(y,x)$ 的导数

$$\Gamma Y(y,x)=\frac{1}{2}(a_1-a_2)y^2+b_1xy+\frac{1}{2}(a-a_2)x^2+m_2 \quad (5.3.76)$$

其中m_2是任意常数。因此，关系(5.3.75)可写成

$$\nu_3=z\frac{dY}{dx} \quad (5.3.77)$$

现在由方程(5.3.73)消去时间 t，并利用(5.3.77)，得到

$$\left.\begin{array}{l}X\frac{d\nu_1}{dx}+a_2\nu_2=(a_1y+b_1x)\frac{dY}{dx} \\ X\frac{d\nu_2}{dx}-a_2\nu_1=-(ax+b_1y)\frac{dY}{dx}\end{array}\right\} \quad (5.3.78)$$

其中引入记号

$$X(y,x)=(a_1-a_2)y+b_1x \quad (5.3.79)$$

现将(5.3.78)第二个方程乘以 $i=\sqrt{-1}$并与第一个相加，有

$$\frac{d(\nu_1+i\nu_2)}{dx}-\frac{ia_2(\nu_1+i\nu_2)}{X}$$

$$=\frac{1}{X}\{(a_1-ib_1)y+(b_1-ia)x\}\frac{dY}{dx} \quad (5.3.80)$$

设y是x的函数，因此X及Y也是x的函数，方程(5.3.80)便是以x为独立变量、以v_1+iv_2为未知函数的非齐次线性方程。积分这个方程，我们得到

$$
\begin{aligned}
v_1+iv_2 &= \exp i a_2\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{X[y(\xi),\xi]}\Big\{v_{10}+iv_{20} \\
&+\int_{x_0}^{x}\frac{(a_1-ib_1)y(\xi)+(b_1-ia)\xi}{X[y(\xi),\xi]}\frac{dY[y(\xi),\xi]}{d\xi} \\
&\times\Big(\exp i a_2\int_{\xi}^{x_0}\frac{d\eta}{X[y(\eta),\eta]}d\xi\Big)\Big\} \qquad (5.3.81)
\end{aligned}
$$

现在借助(5.3.77)将第一积分(5.3.74)写成形式

$$
\left.\begin{aligned}
a_2z^2 &= 2v_1\Gamma-a_1y^2-2b_1xy-ax^2+2E \\
xv_1+yv_2 &= m_1-z^2\frac{dY}{dx}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.82)
$$

由(5.3.82)消去z^2，得到关系

$$
\begin{aligned}
&\{2\Gamma\frac{dY}{dx}+a_2x\}v_1+a_2yv_2 \\
&= a_2m_1+(a_1y^2+2b_1xy+ax^2-2E)\frac{dY}{dx} \qquad (5.3.83)
\end{aligned}
$$

容易看出，关系(5.3.83)的左边是表达式

$$\{2\Gamma\frac{dY}{dx}+a_2(x-iy)\}(v_1+iv_2)$$

的实数部分。因此，考虑到(5.3.81)，关系(5.3.83)可写成

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\Big[\Big\{2\Gamma\frac{dY}{dx}+a_2(x-iy)\Big\}\Big[\exp i a_2\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{X[y(\xi),\xi]}\Big\{v_{10} \\
&+iv_{20}+\int_{x_0}^{x}\frac{(a_1-ib_1)y(\xi)+(b_1-ia)\xi}{X[y(\xi),\xi]}\frac{dY[y(\xi),\xi]}{d\xi}
\end{aligned}
$$

$$\times\left(\text{espi}\ a_2\int_{\xi}^{x^0}\frac{\mathrm{d}\eta}{X[y(\eta),\ \eta]}\right)\mathrm{d}\xi\Big\}\Big]\Big]$$

$$=a_2m_1+(a_1y^2+2b_1xy+ax^2-2E)\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}$$

(5.3.84)

将X，Y的表达式(5.3.79)和(5.3.76)代入后，关系(5.3.84)便是确定y对x依赖关系的待求积分微分方程。

在得到y对x的依靠关系后，由(5.3.81)可确定v_1，v_2为x的函数。而后由(5.3.82)确定$z(x)$，由(5.3.77)确定函数$v_3(x)$。而x对t的依赖关系可由(5.3.72)第一个方程借助(5.3.79)表示为

$$t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{z(x)X[y(x),\ x]} \tag{5.3.85}$$

§5.4 Jacobi最后乘子·Jacobi定理

1．最后乘子的Jacobi定理 首先研究微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x_1,x_2)}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2(x_1,x_2)}$$

它可改写为

$$X_2\mathrm{d}x_1-X_1\mathrm{d}x_2=0 \tag{5.4.1}$$

此方程第一积分的确定与寻求乘子$M(x_1,\ x_2)$相关。在方程(5.4.1)左边乘以这个乘子之后，成为某函数$f(x_1,\ x_2)$的全微分，即

$$M(X_2\mathrm{d}x_1-X_1\mathrm{d}x_2)=\mathrm{d}f \tag{5.4.2}$$

此时由(5.4.1)知$\mathrm{d}f=0$，而$f(x_1,\ x_2)=\text{const}$是方程(5.4.1)的第一积分。因

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

与(5.4.2)比较，得

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=MX_2,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=-MX_1 \tag{5.4.3}$$

由此有

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2}=0 \tag{5.4.4}$$

这就是积分乘子M的方程。如果已知乘子$M(x_1,\ x_2)$，那么第一积分为

$$f(x_1,\ x_2)\equiv\int_{x_{10}}^{x_1}M(x_1,\ x_2)X_2(x_1,\ x_2)\mathrm{d}x_1$$

$$-\int_{x_{20}}^{x_2}M(x_{10},\ x_2)X_1(x_{10},\ x_2)\mathrm{d}x_2=\text{const} \tag{5.4.5}$$

于是，寻求方程(5.4.1)第一积分$f(x_1,\ x_2)=\text{const}$的问题归结为解方程(5.4.4)，并且为此目的只要找到此方程的特解，即积分乘子M的任意特殊值。

其次，研究n个一阶方程组成的方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=X_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)\qquad(i=1,\ \cdots,\ n) \tag{5.4.6}$$

去掉dt，可将其表为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} \tag{5.4.7}$$

作变量替换

$$y_i=y_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)\qquad(i=1,\ \cdots,\ n) \tag{5.4.8}$$

并假设在x_1，…，x_n的某域中，Jacobi行列式

$$I=\frac{\mathrm{D}(y_1,\ \cdots,\ y_n)}{\mathrm{D}(x_1,\ \cdots,\ x_n)}\neq 0 \tag{5.4.9}$$

条件(5.4.9)使之可能有逆变换

$$x_i=x_i(y_1,\ \cdots,\ y_n)\qquad(i=1,\ \cdots,\ n)\tag{5.4.10}$$

对此变换，Jacobi行列式

$$\frac{D(x_1,\ \cdots,\ x_n)}{D(y_1,\ \cdots,\ y_n)}=I^{-1}\neq 0\tag{5.4.11}$$

现将关系(5.4.8)对时间求导数，则(5.4.6)和(5.4.7)变为

$$\frac{dy_i}{dt}=Y_i(y_1,\ \cdots,\ y_n)\tag{5.4.12}$$

$$\frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2}=\cdots=\frac{dy_n}{Y_n}\tag{5.4.13}$$

这里

$$Y_i(y_1,\ \cdots,\ y_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}X_k\right)^{*}\tag{5.4.14}$$

如果按公式(5.4.10)完成逆变换，那么方程(5.4.12)和(5.4.13)将过渡到方程(5.4.6)和(5.4.7)，其中

$$X_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial y_k}Y_k\right)^{**}\tag{5.4.15}$$

在公式(5.4.14)和(5.4.15)以及下面公式中带＊号的表示其中变量x按(5.4.10)用y替代，带＊＊号的表示其中变量y按公式(5.4.8)用x替代。

现在证明，在变换(5.4.8)下，成立等式

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial X_r}{\partial x_r}=I\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial(I^{-1}Y_r)}{\partial y_r}\right)^{**}\tag{5.4.16}$$

实际上，按(5.4.15)，有

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial X_r}{\partial x_r}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_r}{\partial y_k}Y_k\right)^{**}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_s}\left(\sum_{k=1}^{n}Y_k\frac{\partial x_r}{\partial y_k}\right)\frac{\partial y_s}{\partial x_r}\right\}^{**}$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial y_s}{\partial x_r}\left(Y_k\frac{\partial^2 x_r}{\partial y_s\partial y_k}+\frac{\partial Y_k}{\partial y_s}\frac{\partial x_r}{\partial y_r}\right)\right\}^{**}$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial y_s}{\partial x_r}\frac{\partial^2 x_r}{\partial y_s\partial y_k}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial Y_k}{\partial y_s}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial y_s}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial y_k}\right)^{**} \quad (5.4.17)$$

令

$$S_k=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_s}{\partial x_r}\frac{\partial^2 x_r}{\partial y_s\partial y_k}$$

$$S_{s,k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial x_s}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial x_k}$$

我们来计算S_k和$S_{s,k}$。因

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_r}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_r}=\begin{cases}1 & k=r\\ 0 & k\neq r\end{cases} \quad (5.4.18)$$

在(5.4.18)中固定指标r并使指标k取由1到n的所有值，我们得到对量$\frac{\partial y_s}{\partial x_r}$的$n$个线性非齐次代数方程，带有行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}=I^{-1} \quad (5.4.19)$$

将(5.4.22)和(5.4.24)代入(5.4.17)，得到

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial X_r}{\partial x_r}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Y_k}{\partial y_k}+\frac{Y_k}{I^{-1}}\frac{\partial I^{-1}}{\partial y_k}\right)^{**}$$

$$=I\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(I^{-1}Y_k)}{\partial y_k}\right)^{**} \qquad (5.4.25)$$

这就是所要证明的。

现在研究函数$\widetilde{X}_i(x_1, \cdots, x_n)$，它满足关系

$$\widetilde{X}_i=MX_i \qquad (i=1, \cdots, n) \qquad (5.4.26)$$

其中 $M=M(x_1, \cdots, x_n)$是某乘子。这时借助变换(5.4.10)，得到类似于(5.4.14)的表达式

$$\bar{Y}_i(y_1, \cdots, y_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_k}\widetilde{X}_k\right)^{*} \qquad (5.4.27)$$

利用(5.4.26)，它可表为

$$\bar{Y}_i=M^{*}Y_i \qquad (5.4.28)$$

对函数$\widetilde{X}_i$及$\bar{Y}_i$应用关系(5.4.16)，有

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\widetilde{X}_r}{\partial x_r}=I\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial(I^{-1}\bar{Y}_r)}{\partial y_r}\right\}^{**} \qquad (5.4.29)$$

利用(5.4.26)和(5.4.28)，上式可写成

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial(MX_r)}{\partial x_r}=I\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial(M^{*}I^{-1}Y_r)}{\partial y_r}\right\}^{**} \qquad (5.4.30)$$

我们称函数 $M(x_1, \cdots, x_n)$为微分方程组(5.4.6)的Jacobi最后乘子。函数M 是积分乘子方程(5.4.4)的推广方程

$$\frac{\partial(M_1Y_1)}{\partial y_1}+\frac{\partial(M_1Y_2)}{\partial y_2}=0$$

这样，由公式(5.4.33)确定的最后乘子M_1便是方程组(5.4.38)的积分乘子。

由(5.4.9)和(5.4.35)得知，Jacobi 行列式I有形式

$$I=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}=\frac{\mathrm{D}(f_3, f_4, \cdots, f_n)}{\mathrm{D}(x_3, x_4, \cdots, x_n)} \qquad (5.4.39)$$

据(5.4.35)，它异于零。上述结果可表为定理形式。

Jacobi定理　如果对方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}$$

已知最后乘子$M(x_1, \cdots, x_n)$及其$n-2$个第一积分

$$f_3(x_1, \cdots, x_n)=c_3, \; f_4(x_1, \cdots, x_n)=c_4, \; \cdots$$
$$f_n(x_1, \cdots, x_n)=c_n$$

那么通过变量替换

$$y_1=x_1, \; y_2=x_2, \; \cdots, \; y_n=f_n$$

这个方程组可引向方程

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{Y_1}=\frac{\mathrm{d}y_2}{Y_2}$$

它有已知的积分乘子$M_1(y_1, \cdots, y_n)$

$$M_1=\left\{M\left(\frac{\mathrm{D}(f_3, f_4, \cdots, f_n)}{\mathrm{D}(x_3, x_4, \cdots, x_n)}\right)^{-1}\right\}^* \qquad (5.4.40)$$

这样，方程组(5.4.7)的积分归结为寻求带已知积分乘子的一个一阶方程的第一积分，如上面指出的，通常归结为求积分(5.4.5)。

2. Jacobi 定理对Euler-Poisson方程的应用、第四个积分 现在将上面得到的Jacobi 定理应用于 Euler-poisson方程。如在§5.3 中指出的，Euler-Poisson 方程的积分归结为积分方程组(5.3.4)，即

$$\frac{dp}{P}=\frac{dq}{Q}=\frac{dr}{R}=\frac{d\gamma}{\Gamma}=\frac{d\gamma'}{\Gamma'}=\frac{d\gamma''}{\Gamma''}$$

此方程组有三个第一积分(5.3.9)—(5.3.11)，即

$$\left.\begin{array}{l} Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Mg(x_G\gamma+y_G\gamma'+ \\ \qquad +z_G\gamma'')=c_1 \\ Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=c_2,\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1 \end{array}\right\} \quad (5.4.41)$$

现在建立最后乘子M的方程(5.4.31)

$$\frac{\partial(MP)}{\partial p}+\frac{\partial(MQ)}{\partial q}+\frac{\partial(MR)}{\partial r}+\frac{\partial(M\Gamma)}{\partial\gamma}$$

$$+\frac{\partial(M\Gamma')}{\partial\gamma'}+\frac{\partial(M\Gamma'')}{\partial\gamma''}=0 \qquad (5.4.42)$$

由公式(5.4.2)得知

$$\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{\partial Q}{\partial q}=\frac{\partial R}{\partial r}=\frac{\partial\Gamma}{\partial\gamma}=\frac{\partial\Gamma'}{\partial\gamma'}=\frac{\partial\Gamma''}{\partial\gamma''}=0 \qquad (5.4.43)$$

因此，$M=1$这个特殊值满足方程(5.4.42)，而$M=1$就是Euler-Poisson方程的最后乘子。在此情形，按Jacobi 定理，为使方程归结为求积分，只要知道第四个第一积分($n=6$)就够了，即只

要对三个积分(5.4.41)再添加一个独立的第一积分就足够了。这个补充的(第四个)第一积分，虽经众多著名数学家的努力，在一般情形中尚未找到。

在对刚体质量分布的限制下，即对常数A，B，C，x_G, y_G，z_G的限制下，补充的第一积分仅在下列三种情形中求得。

(1) Euler 情形($x_G=y_G=z_G=0$)。在此情形，Euler 方程(5.1.5)有形式

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(C-B)qr=0 \\ B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(A-C)rp=0 \\ C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(B-A)pq=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.4.44}$$

将第一个方程乘以Ap，第二个方程乘以Bq，第三个乘以Cr，并相加，我们得到第四个积分

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=c_1 \tag{5.4.45}$$

(2) Lagrange情形($A=B$，$x_G=y_G=0$)。在此情形，方程(5.1.5)的最后一个有形式

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$$

而第四个积分是

$$r=c_4 \tag{5.4.46}$$

(3) Ковалевская 情形($A=B=2C$，$y_G=z_G=0$)。在上述条件下，Euler方程(5.1.5)为

$$\left.\begin{aligned} &2\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}-qr=0 \\ &2\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+rp=c\gamma'' \\ &\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-c\gamma' \qquad \left(c=\frac{Mgx_G}{C}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.4.47}$$

将(5.4.47)第二个方程乘以$i=\sqrt{-1}$并与第一个方程相加，得

$$2\frac{\mathrm{d}(p+iq)}{\mathrm{d}t}=-ir(p+iq)+ic\gamma'' \tag{5.4.48}$$

将Poisson方程(5.1.7)第二个乘以 i 并与第一个相加，得

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma+i\gamma')}{\mathrm{d}t}=-ir(\gamma+i\gamma')+i\gamma''(p+iq) \tag{5.4.49}$$

将(5.4.48)乘以$(p+iq)$，将(5.4.49)乘以$-c$，然后相加，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(p+iq)^2-c(\gamma+i\gamma')\}=-ir\{(p+iq)^2-c(\gamma+i\gamma')\} \tag{5.4.50}$$

此方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\{p+iq)^2-c(\gamma+i\gamma')\}=-ir \tag{5.4.51}$$

用$-i$代替 i，重复前面议论，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\{(p-iq)^2-c(\gamma-i\gamma')\}=ir \tag{5.4.52}$$

将(5.4.51)与(5.4.52)相加，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\{p+iq)^2-c(\gamma+i\gamma')\}\{(p-iq)^2-c(\gamma-i\gamma')\}=0$$

由此求得补充的第一积分

$$\{(p+iq)^2-c(\gamma+i\gamma')\}\{(p-iq)^2-c(\gamma-i\gamma')\}=c_4 \tag{5.4.53}$$

或者写成

$$(p^2-q^2-c\gamma)^2+(2pq-c\gamma')^2=c_4 \tag{5.4.54}$$

在以上三种情形中，问题归结为求积分。在前两种情形中，

Euler-Poisson方程的通解表为时间的椭圆函数；而在第三种情形表为超椭圆函数

§5.5 Euler-Poisson方程的若干特殊可积情形

Euler 情形、Lagrange 情形及 Ковалевская 情形都是Euler-Poisson方程的通解，如果不仅对质量分布加以限制，而且对运动的初始条件也加以限制，则找到的解为特解。从1890年到1959年人们总共找到九种特解。

为检验这些特殊可积情形，我们引进算子[3, 4]

$$E=\left\{\frac{B-C}{A}qr+\frac{Mg}{A}(z_G\gamma'-y_G\gamma'')\right\}\frac{\partial}{\partial p}$$

$$+\left\{\frac{C-A}{B}rp+\frac{Mg}{B}(x_G\gamma''-z_G\gamma)\right\}\frac{\partial}{\partial q}$$

$$+\left\{\frac{A-B}{C}pq+\frac{Mg}{C}(y_G\gamma-x_G\gamma')\right\}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$+(r\gamma'-q\gamma'')\frac{\partial}{\partial\gamma}+(p\gamma''-r\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma'}$$

$$+(q\gamma-p\gamma')\frac{\partial}{\partial\gamma''}\tag{5.5.1}$$

如果

$$E\{F(p,\ q,\ r,\ \gamma,\gamma',\ \gamma'')\}=0\tag{5.5.2}$$

则

$$F(p,\ q,\ r,\ \gamma,\ \gamma',\ \gamma'')=\text{const}\tag{5.5.3}$$

是Euler-Poisson方程的第一积分。

1. Hess 情形（1890年） 在Hess情形，对刚体质量分布的限制条件为

现在验证(5.5.9)是积分。实际上，有

$$E\{r\}=\frac{A-B}{C}pq+\frac{Mg}{C}(y_G\gamma-x_G\gamma')$$

将(5.5.8)以及(5.5.9)第二式和第三式代入上式，得

$$E\{r\}=-\frac{A}{C}q_0\left(\frac{Mgy_G}{Aq_0}\gamma\right)+\frac{Mg}{C}y_G\gamma=0 \qquad (5.5.10)$$

又

$$E\{q\}=\frac{C-A}{B}rp+\frac{Mg}{B}(x_G\gamma''-z_G\gamma)$$

将(5.5.8)第二式及(5.5.9)第一式代入上式，得

$$E\{q\}=0 \qquad (5.5.11)$$

又

$$E\left\{p-\frac{Mgy_G}{Aq_0}\gamma\right\}=\frac{B-C}{A}qr+\frac{Mg}{A}(z_G\gamma'-y_G\gamma'')$$

$$-\frac{Mgy_G}{Aq_0}(r\gamma'-q\gamma'')$$

利用(5.5.8)第二式及(5.5.9)前两式，得

$$\left\{p-\frac{Mgy_G}{Aq_0}\gamma\right\}=0 \qquad (5.5.12)$$

Бобылев-Стеклов 情形的解是特解。

3. Стеклов 情形(1899年) 在 Стеклов 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=z_G=0 \qquad (5.5.13)$$

在此情形有

$$-\gamma'=pq\frac{(A-B)(A-C)}{(2C-A)Mgx_G} \qquad (5.5.14)$$

$$-\gamma''=pr\frac{(A-B)(A-C)}{(2B-A)Mgx_G} \tag{5.5.15}$$

$$Ap^2+(2B-A)q^2+(2C-A)r^2=0 \tag{5.5.16}$$

$$A^2p^2+(2B-A)Bq^2+(2C-A)Cr^2=L$$

$$=A\frac{(2B-A)(A-2C)}{(B-A)(A-C)}Mgx_G \tag{5.5.17}$$

现在用(5.5.13)、(5.5.14)和(5.5.15)来验证(5.5.16)和(5.5.17)是问题的积分。实际上，利用(5.5.13)有

$$E\{Ap^2+(2B-A)q^2+(2C-A)r^2\}$$

$$=\frac{B-C}{A}qr\cdot 2Ap+\left(\frac{C-A}{B}rp+\frac{Mg}{B}x_G\gamma''\right)$$

$$\cdot(2B-A)\cdot 2q+\left(\frac{A-B}{C}pq-\frac{Mg}{C}x_G\gamma'\right)$$

$$\cdot(2C-A)\cdot 2r=2pqr\left\{(B-C)+\frac{C-A}{B}(2B-A)\right.$$

$$\left.+\frac{A-B}{C}(2C-A)\right\}+2Mgx_G\left\{\frac{2B-A}{B}q\gamma''\right.$$

$$\left.-\frac{2C-A}{C}r\gamma''\right\}$$

将(5.5.14)和(5.5.15)代入上式，便得

$$E\{Ap^2+(2B-A)q^2+(2C-A)r^2\}=0 \tag{5.5.18}$$

考虑到(5.5.13)，有

$$E\{A^2p^2+(2B-A)Bq^2+(2C-A)Cr^2\}$$

$$=\left(\frac{B-C}{A}qr\right)\cdot 2A^2p+\left(\frac{C-A}{B}rp+\frac{Mg}{B}x_G\gamma''\right)$$

$$E\left\{\frac{B-C}{A}r^2-\frac{A-B+(4B-3A)/2}{C}p^2\right\}=\frac{B-C}{A}$$

$$\cdot\left\{\frac{A-B}{C}pq-\frac{Mg}{C}\gamma' x_G\right\}\cdot 2r-\frac{A-B+(4B-3A)/2}{C}$$

$$\cdot\left\{\frac{B-C}{A}qr\right\}\cdot 2p=2pqr\left\{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}\right.$$

$$\left.-\frac{(B-C)(2B-A)}{2CA}\right\}-2\frac{B-C}{AC}Mg\gamma' x_G r$$

$$=2pqr\left\{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}-\frac{(B-C)(2B-A)}{2CA}\right.$$

$$\left.+\frac{B-C}{AC}\left(\frac{4B-3A}{2}\right)\right\}=0$$

5. Чаплыгин**情形(1904年)** 在Чаплыгин情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$9(2B-A)(2C-A)=4BC,\quad y_G=z_G=0 \tag{5.5.25}$$

此时有

$$-\gamma'=(\delta+\lambda p^{-4/3})\frac{pq}{Mgx_G} \tag{5.5.26}$$

$$-\gamma''=(\varepsilon+\mu p^{-4/3})\frac{pr}{Mgx_G} \tag{5.5.27}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\delta=\frac{(B-A)(C-A)}{2C-A},\quad \varepsilon=\frac{(B-A)(C-A)}{2B-A}\\&\lambda=\frac{C(3A-2B)}{2C-A}s,\quad \mu=\frac{B(3A-2C)}{2B-A}s\end{aligned}\right\} \tag{5.5.28}$$

而 s 为下列方程的根

$$A^3(2B+2C-3A)s^3=\frac{4(2B-A)^2(2C-A)^2}{9(3A-2B)(3A-2C)}x_G^2M^2g^2 \tag{5.5.29}$$

并且有

$$A^2p^2-(2B-A)(2B-3A)q^2-(2C-A)(2C-3A)r^2=0 \tag{5.5.30}$$

利用(5.5.25)—(5.5.27)容易验证(5.5.30)是积分，因为有

$$E\{A^2p^2-(2B-A)(2B-3A)q^2-(2C-A)(2C-3A)r^2\}$$

$$=\left(\frac{B-C}{A}qr\right)\cdot 2A^2p-\left(\frac{C-A}{B}rp+\frac{Mg\gamma''x_G}{B}\right)\cdot 2q$$

$$(2B-A)(2B-3A)-\left(\frac{A-B}{C}pq-\frac{Mg\gamma'x_G}{C}\right)$$

$$\cdot 2r(2C-A)(2C-3A)$$

$$=2pqr\left\{(B-C)A-\frac{C-A}{B}(2B-A)(2B-3A)\right.$$

$$\left.-\frac{A-B}{C}(2C-A)(2C-3A)\right\}+2Mgx_G\left\{\frac{\gamma'r}{C}(2C-A)\right.$$

$$\left.\cdot(2C-3A)-\frac{\gamma''q}{B}(2B-A)(2B-3A)\right\}$$

$$=2pqr\left\{(B-C)A-\frac{C-A}{B}(2B-A)(2B-3A)\right.$$

$$-\frac{A-B}{C}(2C-A)(2C-3A)-\frac{\delta}{C}(2C-A)(2C-3A)$$

$$\left.+\frac{\varepsilon}{B}(2B-A)(2B-3A)\right\}+p^{-+3}\cdot 2pqr\left\{-\frac{\lambda}{C}\right.$$

$$\left.\cdot(2C-A)(2C-3A)+\frac{\mu}{B}(2B-A)(2B-3A)\right\}=0$$

6. Kowalewski 情形(1908年) 在 Kowalewski 情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$A=18C\frac{B-C}{10B-9C},\ y_G=z_G=0 \tag{5.5.31}$$

此时有

$$-Mg\gamma''x_G=3C\frac{3C-2B}{10B-9C}r\left\{p-\frac{(3C-2B)(3C-4B)}{b(10B-9C)}\right\} \tag{5.5.32}$$

以及

$$q^2+m_0(p-c_0)^2=m_1=\text{const} \tag{5.5.33}$$

其中

$$m_0=\frac{36C^2}{(10B-9C)^2},\ c_0=\frac{3}{2}\frac{(3C-2B)^2(3C-4B)}{bB(10B-9C)} \tag{5.5.34}$$

(b为常数)

我们来证明，欲使(5.5.33)为问题的积分，必有(5.5.32)。实际上，有

$$E\{q^2+m_0(p-c_0)^2\}=\left(\frac{C-A}{B}rp+\frac{Mg\gamma''}{B}x_G\right)\cdot 2q$$

$$+\frac{B-C}{A}qr\cdot zm_0(p-c_0)=2q\left\{\frac{C-A}{B}rp+\frac{B-C}{A}rpm_0\right.$$

$$\left.+\frac{Mg\gamma''}{B}x_G-\frac{B-C}{A}rc_0m_0\right\}$$

如果

$$E\{q^2+m_0(p-c_0)^2\}=0$$

则上式括号内的项为零，即有

$$-Mg\gamma''x_G=\left\{C-A+\frac{(B-C)}{A}\frac{B}{}m_0\right\}r$$

$$\cdot\left\{p-\frac{\frac{B-C}{A}c_0m_0}{C-A+\frac{(B-C)B}{A}m_0}\right\}$$

利用(5.5.31)第一式及(5.5.34)，便得

$$-Mg\gamma''x_G=3C\frac{3C-2B}{10B-9C}r\left\{p-\frac{(3C-2B)(3C-4B)}{b(10B-9C)}\right\}$$

7. Горячев-Чаплыгин情形(1900年) 在Горячев-Чаплыгин情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$A=B=4C,\ y_G=z_G=0 \tag{5.5.35}$$

此时有

$$4(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''=0 \tag{5.5.36}$$

以及

$$r(p^2+q^2)-\frac{Mgx_G}{C}p\gamma''=0 \tag{5.5.37}$$

我们来证明，欲使(5.5.37)为问题的积分，必有(5.5.36)。实际上，利用(5.5.35)，有

$$E\left\{r(p^2+q^2)-\frac{Mgx_G}{C}p\gamma''\right\}=(p^2+q^2)\left(\frac{A-B}{C}pq\right.$$

$$\left.-\frac{Mgx_G}{C}\gamma'\right)-2r\left[p\left(\frac{B-C}{A}q\gamma\right)+q\left(\frac{C-A}{B}rp\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{Mgx_G}{B}\gamma''\right)\right]-\frac{Mgx_G}{C}\gamma''\left(\frac{B-C}{A}qr\right)-\frac{Mgx_G}{C}p(q\gamma-p\gamma')$$

$$=-(p^2+q^2)\frac{Mgx_G}{C}\gamma'+2r\left\{p\frac{3}{4}qr+q\left[-\frac{3}{4}rp\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{Mgx_G}{4C}\gamma''\right]\right\}-\frac{Mgx_G}{C}\gamma''\cdot\frac{3}{4}qr-\frac{Mgx_G}{C}p(q\gamma-p\gamma')$$

$$=-\frac{Mgx_G}{4C}q\{4(p\gamma+q\gamma')+r\gamma''\}$$

由

$$E\left\{r(p^2+q^2)-\frac{Mgx_G}{C}q\gamma''\right\}=0$$

便得(5.5.36)。

8. Grioli情形(1947年) 在Grioli情形，对刚体质量分布的限制条件

$$y_G=0,\ \sqrt{B-C}x_G=\sqrt{A-B}z_G \tag{5.5.38}$$

此时有积分

$$(Ax_Gp+Cz_Gr)q-Mg(x_G^2+z_G^2)\gamma'=0 \tag{5.5.39}$$

$$x_Gp+z_Gr=m_0=\text{const} \tag{5.5.40}$$

$$Bm_0(z_Gp-x_Gr)-(A-C)(x_G^2+z_G^2)pr$$
$$+Mg(x_G^2+z_G^2)(x_G\gamma''-z_G\gamma)=0 \tag{5.5.41}$$

$$p^2+q^2+r^2=c=\text{const} \tag{5.5.42}$$

我们来证明，欲使(5.5.40)为积分，必有(5.5.39)；欲使(5.5.42)为积分，必有(5.5.41)。实际上，如果(5.5.40)为积分，则有

$$0=E\{x_Gp+z_Gr\}=x_G\left\{\frac{B-C}{A}qr+\frac{Mgz_G}{A}\gamma'\right\}$$
$$+z_G\left\{\frac{A-B}{C}pq-\frac{Mgx_G}{C}\gamma'\right\}=q\left\{\frac{B-A}{C}x_Gr+\frac{A-B}{C}z_Gp\right\}$$
$$+Mgx_Gz_G\gamma'\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)=\frac{B-C}{AC}\frac{x_G}{z_G}\{(Ax_Gp+Cz_Gr)q$$
$$-Mg(x_G^2+z_G^2)\gamma'\}$$

于是得到

$$(Ax_Gp+Cz_Gr)q-Mg(x_G^2+z_G^2)\gamma'=0$$

如果(5.5.42)为积分，则有

$$0=E\{p^2+q^2+r^2\}=2p\left(\frac{B-C}{A}qr+\frac{Mgz_G}{A}\gamma'\right)$$

$$+2q\left\{\frac{C-A}{B}rp+\frac{Mg}{B}(x_G\gamma''-z_G\gamma)\right\}+2r\left(\frac{A-B}{C}pq\right.$$

$$\left.-\frac{Mg}{C}x_G\gamma'\right)$$

利用(5.4.38)、(5.5.39)和(5.5.40)，得到

$$E\{p^2+q^2+r^2\}=\frac{2q}{B(x_G^2+z_G^2)}\{Mg(x_G^2+z_G^2)(x_G\gamma''-z_G\gamma)$$

$$-(A-C)(x_G^2+z_G^2)pr+Bm_0(z_Gp-x_Gr)\}$$

因此有

$$Bm_0(z_Gp-x_Gr)-(A-C)(x_G^2+z_G^2)pr$$
$$+Mg(x_G^2+z_G^2)(x_G\gamma''-z_G\gamma)=0$$

9. Харламова情形(1959年) 在Харламова情形，对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\ (2C-A)\sqrt{A(C-B)(2C-A)}x_G$$
$$+(C-2A)\sqrt{C(A-B)(C-2A)}z_G=0 \qquad (5.5.43)$$
$$C>2A>2B \qquad (x_G<0)$$

此时有积分

$$Ap\cos\rho+Cr\sin\rho=n=\text{const} \qquad (5.5.44)$$

$$-Mg\gamma'\sqrt{x_G^2+z_G^2}=q(bp+b''r) \qquad (5.5.45)$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
\sin\rho &= \sqrt{\frac{A(C-B)(2C-A)}{(C-A)\{3AC-B(A+C)\}}} \\
\cos\rho &= \sqrt{\frac{C(A-B)(C-2A)}{(C-A)\{3AC-B(A+C)\}}} \\
b &= \frac{(A-B)\sqrt{x_G^2+z_G^2}\,\sin\rho}{z_G\cos\rho-x_G\sin\rho} \\
b'' &= \frac{(B-C)\sqrt{x_G^2+z_G^2}\cos\rho}{z_G\cos\rho-x_G\sin\rho}
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.46}
$$

利用(5.5.43)和(5.5.45)，容易验证(5.5.44)是问题的积分。

需要注意的是，在 Харламова 情形中，要求 $C>2A>2B$。但是，对刚体来说这个条件不能实现，因为与 $A+B>C$ 相矛盾。后来有人证明，这个条件对于充满无摩擦不可压缩流体的回转刚体是可实现的。

§5.6 带陀螺静矩的重刚体绕固定点转动问题的若干精确解

带陀螺静矩的重刚体绕固定点转动问题的动力学方程为[5]

$$
\left.\begin{aligned}
A\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(C-B)qr &= \lambda_2 r-\lambda_3 q \\
&\quad +Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'') \\
B\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(A-C)rp &= \lambda_3 p-\lambda_1 r \\
&\quad +Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma) \\
C\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(B-A)pq &= \lambda_1 q-\lambda_2 p \\
&\quad +Mg(y_G\gamma-x_G\gamma')
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.1}
$$

$$+\left\{\frac{A-B}{C}pq+\frac{\lambda_1 q-\lambda_2 p}{C}\right.$$

$$\left.+\frac{Mg}{C}(y_G\gamma-x_G\gamma')\right\}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$+(r\gamma'-q\gamma'')\frac{\partial}{\partial\gamma}+(p\gamma''-r\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma'}$$

$$+(q\gamma-p\gamma')\frac{\partial}{\partial\gamma''} \qquad (5.6.6)$$

利用算子(5.6.6)可验证问题的积分。

从本世纪六十年代开始，人们借助不变关系方法找到了一些新的精确解。

1. 线性不变关系

(1) Харламов 第一解(1965年)。方程(5.6.1)、(5.1.7)允许有线性不变关系组

$$C_{1i}p+C_{2i}q+C_{3i}r=n_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots) \quad (5.6.7)$$

其中 C_{ki}，n_i 为常数。这样的独立关系不多于三个，因为在有三个独立关系的情形，角速度分量已完全确定并且是常量。此时，角速度矢量不仅在刚体中不变而且在空间中不变。于是，有三个不变关系的解确定刚体绕过固定点的固定轴转动。设

$$p=p_0,\quad q=q_0,\quad r=r_0 \qquad (5.6.8)$$

则　$E\{p\}=E\{q\}=E\{r\}=0$　给出

$$\left.\begin{aligned}&(B-C)qr+\lambda_2 r-\lambda_3 q+Mg(z_G\gamma'-y_G\gamma'')=0\\&(C-A)rp+\lambda_3 p-\lambda_1 r+Mg(x_G\gamma''-z_G\gamma)=0\\&(A-B)pq+\lambda_1 q-\lambda_2 p+Mg(y_G\gamma-x_G\gamma')=0\end{aligned}\right\} \qquad (5.6.9)$$

将(5.6.8)代入(5.6.9)，可确定 γ，γ'，γ''。

特别地，当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 时，则归结为 Staude 永恒转动。

(2) Харламов 第二解(1964年)。对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\ (2B-C)\lambda_1 z_G=(2B-A)\lambda_3 x_G \tag{5.6.10}$$

此时，方程有两个线性不变关系

$$p=\varkappa\frac{x_G}{\sqrt{x_G^2+z_G^2}},\qquad r=\varkappa\frac{z_G}{\sqrt{x_G^2+z_G^2}} \tag{5.6.11}$$

其中常数 $\varkappa$ 由等式

$$\varkappa^2=\lambda_1^2(2B-A)^{-2}+\lambda_3(2B-C)^{-2} \tag{5.6.12}$$

来确定。

现在用 $E\{p\}=E\{r\}=0$ 来验证(5.6.12)。实际上，利用(5.6.10)第一式，有

$$E\{p\}=\left\{\frac{B-C}{A}qr+\frac{\lambda_2 r-\lambda_3 q}{A}+\frac{Mg}{A}z_G\gamma'\right\}=0$$

$$E\{r\}=\left\{\frac{A-B}{C}pq+\frac{\lambda_1 q-\lambda_2 p}{C}-\frac{Mg}{C}x_G\gamma'\right\}=0$$

由以上两式消去 γ'，得

$$(B-C)qrx_G+(A-B)pqz_G+(\lambda_2 r-\lambda_3 q)x_G$$
$$+(\lambda_1 q-\lambda_2 p)z_G=0$$

将(5.6.11)代入上式，得

$$q\left\{(B-C)\frac{\varkappa x_G z_G}{\sqrt{x_G^2+z_G^2}}+(A-B)\frac{\varkappa x_G z_G}{\sqrt{x_G^2+z_G^2}}\right.$$
$$\left.-\lambda_3 x_G+\lambda_1 z_G\right\}=0$$

由花括号内的项为零并注意到(5.6.10)第二式，得

$$\varkappa=(\lambda_3 x_G-\lambda_1 z_G)\frac{\sqrt{x_G^2+z_G^2}}{x_G z_G(A-C)}$$

$$=\frac{\lambda_3}{A-C}\sqrt{1+\frac{(2B-C)^2\lambda_1^2}{(2B-A)^2\lambda_3^2}}$$

$$-\frac{\lambda_1}{A-C}\sqrt{1+\frac{(2B-A)^2\lambda_3^2}{(2B-C)^2\lambda_1^2}}$$

$$=\sqrt{\lambda_1^2(2B-A)^{-2}+\lambda_3^2(2B-C)^{-2}}$$

即得到(5.6.12)。

特别地，如果 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，$\varkappa\neq0$（如 $z_G=0$，$A=2B$，这些条件成立），则归结为 Бобылев-Стеклов 情形；当 $\varkappa=0$ 时，则归结为物理摆情形。

(3) 有一个线性不变关系。前述带三个和两个不变关系的解已经完全找到，不存在其他解。现时已找到带一个线性不变关系的四种解。

Lagrange 情形(1773年)：对刚体质量分布的限制条件为

$$B=C,\quad y_G=z_G=0 \tag{5.6.13}$$

以及

$$\lambda_2=\lambda_3=0 \tag{5.6.14}$$

此时有一个不变关系

$$p=p_0 \tag{5.6.15}$$

这容易验证。实际上，利用(5.6.13)和(5.6.14)，我们有

$$E\{p\}=\left\{\frac{B-C}{A}qr+\frac{\lambda_2r-\lambda_3q}{A}+\frac{Mg}{A}(z_G\gamma'-y_G\gamma'')\right\}=0$$

在 Lagrange 情形，非零陀螺静矩的加入并不改变积分的形式。

Сретенский 第一解(1963年)：对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\quad \sqrt{A(B-C)}\,x_G=\sqrt{C(A-B)}\,z_G \tag{5.6.16}$$

以及

$$\lambda_2=0 \tag{5.6.17}$$

此时有一个不变关系

$$\{(A-B)p+\lambda_1\}z_G-\{(C-B)r+\lambda_3\}x_G=0 \tag{5.6.18}$$

利用(5.6.16)和(5.6.17)容易验证(5.6.18)是积分。实际上，有

$$
\begin{aligned}
&E[\{(A-B)p+\lambda_1\}z_G-\{(C-B)r+\lambda_3\}x_G]\\
&=(A-B)z_G\left\{\frac{B-C}{A}qr-\frac{\lambda_3 q}{A}+\frac{Mgz_G\gamma'}{A}\right\}\\
&\quad-(C-B)x_G\left\{\frac{A-B}{C}pq+\frac{\lambda_1 q}{C}-\frac{Mgx_G\gamma'}{C}\right\}\\
&=\frac{B-C}{C}\,\frac{x_G}{z_G}\Big[\{(A-B)p+\lambda_1\}z_G+\{(B-C)r-\lambda_3\}x_G\Big]q\\
&\quad+Mg\gamma'\left\{\frac{A-B}{A}z_G^2+\frac{C-B}{C}x_G^2\right\}\\
&=0
\end{aligned}
$$

当然，上面最后一步尚需再一次利用(5.6.18)。

特别地，如果 $\lambda_1=\lambda_3=0$，则(5.6.18)成为

$$(A-B)pz_G+(B-C)rx_G=0$$

利用(5.6.16)，上式也可写成

$$Apx_G+Crz_G=0$$

这就是经典 Hess 情形。

Grioli 情形(1947年)：对刚体质量分布的限制条件为

$$y_G=0,\quad \sqrt{B-C}\,x_G=\sqrt{A-B}\,z_G \tag{5.6.19}$$

以及

$$\lambda_2=\lambda_3=0 \tag{5.6.20}$$

此时有一个线性不变关系

$$px_G+rz_G=n=\mathrm{const} \tag{5.6.21}$$

Харламова第一解(1969年)：在此情形加在系统参数上的限制条件为

$$\lambda_3'=0,\ b_2=0,\ b_1^2=(a-a_1)(a_1-a_2) \tag{5.6.22}$$

不变关系为

$$y=m(x-c)+n \tag{5.6.23}$$

2. 平方不变关系

(1) Жуковский情形(1885年)。在此情形对系统参数的限制条件为

$$x_G=y_G=z_G=0 \tag{5.6.24}$$

不变关系为

$$(Ap+\lambda_1)^2+(Bq+\lambda_2)^2+(Cr+\lambda_3)^2=n^2 \tag{5.6.25}$$

实际上，我们有

$$\begin{aligned}
&\dot{E}\{(Ap+\lambda_1)^2+(Bq+\lambda_2)^2+(Cr+\lambda_3)^2\}\\
&=2A(Ap+\lambda_1)\left\{\frac{B-C}{A}qr+\frac{\lambda_2 r-\lambda_3 q}{A}\right\}\\
&\quad+2B(Bq+\lambda_2)\left\{\frac{C-A}{B}rp+\frac{\lambda_3 p-\lambda_1 r}{B}\right\}\\
&\quad+2C(Cr+\lambda_3)\left\{\frac{A-B}{C}pq+\frac{\lambda_1 q-\lambda_2 p}{C}\right\}=0
\end{aligned}$$

这种情形是经典Euler情形的推广。

(2) Харламов第三解(1964年)。在此情形对系统参数的限制条件为

$$y_G=z_G=0,\quad \lambda_2=\lambda_3=0$$

$$A=18C\frac{B-C}{10B-9C} \tag{5.6.26}$$

平方不变关系为

$$q^2+m(p-c)^2=m_0 \tag{5.6.27}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} m&=\frac{36C^2}{(10B-9C)^2},\qquad c=\frac{\lambda_1}{2}\frac{10B-9C}{BC}\\ &\quad+\frac{3}{2}\frac{(3C-2B)^2(3C-4B)}{bB(10B-9C)}\\ m_0&=\frac{36C^2}{(10B-9C)^2}\left\{\frac{3}{2}\frac{\lambda_1}{b}\right.\\ &\quad\times\frac{(3C-2B)(B-C)(10B-9C)}{B^2C}\\ &\quad+\frac{9}{4}\frac{(3C-2B)^3(3C-4B)}{b^2B^2(10B-9C)^2}\\ &\quad\left.\times(18C^2-36BC+17B^2)\right\} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.28}$$

而

$$\begin{aligned} -Mgx_G\gamma''=r\Bigg\{&3C\frac{3C-2B}{10B-9C}p-2\lambda_1\\ &-3\frac{C(3C-2B)^2(3C-4B)}{b(10B-9C)^2}\Bigg\} \end{aligned} \tag{5.6.29}$$

容易由(5.6.29)验证不变关系(5.6.27)。

当 $\lambda_1=0$ 时，便得经典 Kowalewski 情形。

(3) Xарламов 第四解(1964年)。在此情形对系统参数的限制条件为

$$y_G=z_G=0,\qquad \lambda_2=\lambda_3=0 \tag{5.6.30}$$

不变关系为

$$q^2=c_0+c_1p+c_2p^2 \tag{5.6.31}$$

其中

$$
\left.
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{(2C-A)A}{(A-B)(A-C)(C-B)}\Big[H \\
&\quad -\lambda_1^2 \frac{3BC-AB-C^2}{(2B-A)^3(2C-A)^3} \\
&\quad \times\{A^3-2A^2(2C+B)+AC(3C+8B) \\
&\quad -BC(5C+B)\}\Big] \\
c_1 &= 2\lambda_1 \frac{3BC-AB-C^2}{(2B-A)^2(2C-A)} \cdot \frac{A}{C-B} \\
c_2 &= \frac{A(A-C)}{(2B-A)(C-B)}
\end{aligned}
\right\} \tag{5.6.32}
$$

以及

$$
Mg\gamma'' x_G = r\Big[\frac{(A-B)(A-C)}{2B-A} \cdot p
$$

$$
+\lambda_1 \left\{B \cdot \frac{3BC-AB-C^2}{(2B-A)^2(2C-A)} - 1\right\}\Big] \tag{5.6.33}
$$

利用(5.6.30)和(5.6.33)容易验证有不变关系(5.6.31)。

特别地，当 $\lambda_1=0$ 时，给出经典 Стеклов 情形。

属于平方不变关系的还有 Докшевич 解，Харламова 解，Харламов 第五解，以及 Харламов-Харламова 解等这些解都是借助专门轴系中的方程求得的[5]。

属于高于二阶的不变关系的解，除 Ковалсвская 情形外尚有四种[5]。

习　　题

1．试证，对完全动力对称情形 $A=B=C$，Euler-Poisson 方程有积分

$$
x_G p + y_G q + z_G r = \text{const}
$$

2．试证，当 $C=2A$，$x_G=y_G=0$ 时，有

$$(2C-A)\frac{C-B}{A}r^2=(B-A)p^2$$

$$-\frac{\varkappa}{6}(2B-3A)p^{2/3} \qquad (2)$$

$$-Mgx_G\gamma(2B-A)(2C-A)=A(B-A)(C-A)p^2$$

$$-\frac{\varkappa}{12}A(3A^2-4BC)p^{2/3} \qquad (3)$$

$$-Mgx_G\gamma'(2C-A)=q\Big\{(B-A)(C-A)p$$

$$+\frac{\varkappa}{18}C(2B-3A)p^{-1/3}\Big\} \qquad (4)$$

$$-Mgx_G\gamma''(2B-A)=r\Big\{(B-A)(C-A)p$$

$$+\frac{\varkappa}{18}B(2C-3A)p^{-1/3}\Big\} \qquad (5)$$

其中

$$\varkappa^3=-\frac{2592(2B-A)^2(2C-A)^2}{A^3(2B+2C-3A)(2B-3A)(2C-3A)}M^2g^2x_G^2$$

试利用(5)导出积分(1)、利用(4)导出积分(2)、利用(4)(5)导出积分(3)、利用(1)(3)(5)导出积分(4)、以及利用(2)(3)(4)导出积分(5)。

6. 试证，在有陀螺静矩的Grioli情形中，欲使积分(5.6.21)存在，必有

$$Mg\gamma'(x_G^2+z_G^2)=q\Big\{A\Big(p+\frac{\lambda_1}{A-B}\Big)x_G+Crz_G\Big\}$$

参 考 文 献

[1] Харламов.П.В.,Лекции по Динамике твердого тела, Новосибирск, 1965.

[2] Архангельский. Ю.А., Аналитическая динамика твердого тела, м, 1977.

[3] Leimanis. E., The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point, S-V, 1965.

[4] 刘桂林、梅凤翔，广义*Lie*级数对重刚体绕固定点转动问题的应用，中国兵工学会应用力学研究会第一次学术报告会，1979年。

[5] Горр. Г. В, Кудряшова. Л. В, Степанова. Л. А.,Классические задачи динамики твердого тела, Киев, 1978.

其中 $\boldsymbol{v}_\nu$ 为第ν个质点的速度矢量，矢量 $\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}$和标量 D_β 为坐标和时间的函数。(6.1.1)为完整约束；(6.1.2)为微分约束，如果是不可积分的，则为非完整约束。

当表达式(6.1.1)、(6.1.2)的左边部分为正时，就说约束放松，或说系统脱离约束；当左边部分等于零时，就说约束起作用，或者处于张紧，换言之系统处于约束上。

2. 单面约束加在系统点的速度和加速度上的条件 为得到单面约束加在点的速度和加速度上的条件，我们引出两个辅助等式。注意到表达式(6.1.1)和(6.1.2)的左边部分可作为时间的复合函数来研究，而不管显含 t 还是不显含 t。给时间 t 以正的增量 Δt，并将函数 $f_\alpha(t+\Delta t)$和 $\varphi_\beta(t+\Delta t)$按 Δt 的升阶展为级数，得到

$$f_\alpha(t+\Delta t)=f_\alpha(t)+\frac{\mathrm{d}f_\alpha}{\mathrm{d}t}\Delta t+\frac{\mathrm{d}^2 f_\alpha}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{2}+e_3 \tag{6.1.3}$$

$$\varphi_\beta(t+\Delta t)=\varphi_\beta(t)+\frac{\mathrm{d}\varphi_\beta}{\mathrm{d}t}\Delta t+\eta_2 \tag{6.1.4}$$

其中 e_3和 η_2 分别表示 Δt 的三阶项和二阶项。既然Δt 总假设为正的，那么这些分解式中函数 f_α 和 φ_β 的导数必须取所谓右导数，即在 $\Delta t\to 0$，$\Delta t>0$ 下计算的导数。

(1) 如果约束 f_α 和 φ_β 放松，即

$$f_\alpha>0,\quad \varphi_\beta>0$$

那么由(6.1.3)和(6.1.4)看出，不能确定函数 f_α 和 φ_β 对时间的导数的符号，因为在此情形函数 f_α 和 φ_β 可以增大，减小或保持不变。

(2) 如果系统运动与约束 $f_\alpha=0$ 和 $\varphi_\beta=0$ 适合，而时刻 t不是系统离开约束的时刻，那么在不超过某个界限的任何 Δt 下，等式(6.1.3)和(6.1.4)的左边和右边都为零。因此，在此情形，在时刻 t 对任何 s 有等式

$$\left.\begin{array}{l}f_\alpha=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}f_\alpha}{\mathrm{d}t}=0,\qquad \dfrac{\mathrm{d}^2 f_\alpha}{\mathrm{d}t^2}=0,\ \cdots\\ \dfrac{\mathrm{d}^{(s)}f_\alpha}{\mathrm{d}t^s}=0\\ \varphi_\beta=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}\varphi_\beta}{\mathrm{d}t}=0,\ \cdots,\qquad \dfrac{\mathrm{d}^{(s)}\varphi_\beta}{\mathrm{d}t^s}=0\end{array}\right\} \tag{6.1.5}$$

这个条件是系统处于约束上的充要条件。下述条件只是必要条件

$$f_\alpha=0,\quad \frac{\mathrm{d}f_\alpha}{\mathrm{d}t}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^2 f_\alpha}{\mathrm{d}t^2}=0 \tag{6.1.6}$$

$$\varphi_\beta=0\quad \frac{\mathrm{d}\varphi_\beta}{\mathrm{d}t}=0 \tag{6.1.7}$$

这些等式就是对系统点的速度和加速度的完全确定的限制。

实际上，(6.1.6)第二式可写成形式

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathrm{grad}_\nu f_\alpha\cdot v_\nu+\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=0 \tag{6.1.8}$$

(6.1.6)第三式可写成

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathrm{grad}_\nu f_\alpha\cdot a_\nu+D_2 f_\alpha=0 \tag{6.1.9}$$

其中

$$\begin{aligned}D_2 f_\alpha=&\sum_{\nu=1}^{N}\dot{x}_\nu\sum_{\mu=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\dot{x}_\mu+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\nu\partial y_\mu}\dot{y}_\mu\right.\\&\left.+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_\nu\partial z_\mu}\dot{z}_\mu\right)+\sum_{\nu=1}^{N}\dot{y}_\nu\sum_{\mu=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y_\nu\partial x_\mu}\dot{x}_\mu\right.\\&\left.+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y_\nu\partial y_\mu}\dot{y}_\mu+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial y_\nu\partial z_\mu}\dot{z}_\mu\right)\end{aligned}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{N}\dot{z}_\nu\sum_{\mu=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\nu\partial x_\mu}\dot{x}_\mu+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\nu\partial y_\mu}\dot{y}_\mu\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial z_\nu\partial z_\mu}\dot{z}_\mu\right)+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2}$$

$$+2\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t\partial x_\nu}\dot{x}_\nu+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t\partial y_\nu}\dot{y}_\nu+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t\partial z_\nu}\dot{z}_\nu\right)\qquad(6.1.10)$$

(6.1.7)式成为

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\boldsymbol{v}_\nu+D_\beta=0\qquad(6.1.11)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\boldsymbol{a}_\nu+\sum_{\nu=1}^{N}\dot{\boldsymbol{B}}_\nu^{(\beta)}\cdot\boldsymbol{v}_\nu+\dot{D}_\beta=0\qquad(6.1.12)$$

公式(6.1.8)和(6.1.11)是对速度的限制，(6.1.9)和(6.1.12)是对加速度的限制。

(3) 现在假设时刻 t 是系统脱离约束 f_α 或 φ_β的时刻。这首先意味着

$$f_\alpha(t)=0,\qquad\varphi_\beta(t)=0$$

其次，对不超过某个界限的任何正的Δt，有

$$f_\alpha(t+\Delta t)>0,\qquad\varphi_\beta(t+\Delta t)>0$$

将这些不等式与展开式(6.1.3)和(6.1.4)相比较，得到对时刻 t 成立不等式

$$\frac{\mathrm{d}f_\alpha}{\mathrm{d}t}\Delta t+\frac{\mathrm{d}^2 f_\alpha}{\mathrm{d}t^2}\frac{\Delta t^2}{2}+\varepsilon_3>0\qquad(6.1.13)$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_\beta}{\mathrm{d}t}\Delta t+\eta_2>0\qquad(6.1.14)$$

这些不等式在无论多么小的正的 Δt 下成立。因此，由(6.1.13)

得到

$$\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}t}\geqslant 0 \qquad (6.1.15)$$

这个条件是有限约束在系统离开约束的时刻对点的速度的限制。此刻微分约束加在速度上的条件乃是

$$\varphi_\beta(t)=0 \qquad (6.1.16)$$

如果在系统离开有限约束 f_a 的时刻成立不等式 $\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}t}>0$，那么由(6.1.13)看出二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2f_a}{\mathrm{d}t^2}$ 可有任意符号，即在此情形对点的加速度没有任何限制。如果 $\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}t}=0$，因为不等式在无论多么小的正 Δt 下成立，由此得到条件

$$\frac{\mathrm{d}^2f_a}{\mathrm{d}t^2}\geqslant 0 \qquad (6.1.17)$$

这是对点的加速度的限制。类似地，由不等式(9.1.14)得知，对微分约束在系统离开约束的时刻总有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_\beta}{\mathrm{d}t}\geqslant 0 \qquad (6.1.18)$$

这是所加约束在约束脱离时刻对点的加速度的限制。

例1 作为单面有限约束的例子，我们研究由以下不等式表示的约束[1]

$$c-\sum_{\nu=1}^{N}\rho_\nu=0 \qquad (6.1.19)$$

其中 c 为常数，ρ_ν 为相邻两点间的距离：$\rho_\nu^2=(x_\nu-x_{\nu+1})^2+(y_\nu-y_{\nu+1})^2+(z_\nu-z_{\nu+1})^2$，对 ν 求和由 1 至 N，因此 $x_{N+1}=x_1$，$y_{N+1}=y_1$，$z_{N+1}=z_1$。此约束可这样实现：系统的质点是穿在长为 c 的不可伸长的闭线上的无限小小珠。

例2 作为单面非完整约束的例子，我们研究半径为 R 的圆球沿固定水平面的滚动。假设接触点的滑动仅在 x 轴正向上发

生，于是有[2]

$$\dot{x}-R\omega_y\geqslant 0 \tag{6.1.20}$$

其中 x 为球心的一个坐标；ω_y 为球的角速度在固定轴 y 方向上的投影，用 Euler 角及其对时间的导数表示为

$$\omega_y=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

§6.2 单面约束加在虚位移上的条件

1. **单面完整约束情形** 设单面完整约束为

$$f_a(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu,\ t)\geqslant 0 \tag{6.2.1}$$

虚位移是在固定时间t下为约束所允许的无限小位移($\delta x_\nu,\delta y_\nu,\delta z_\nu$)，因此有

$$f_a(x_\nu+\delta x_\nu,\ y_\nu+\delta y_\nu,\ z_\nu+\delta z_\nu,\ t)\geqslant 0 \tag{6.2.2}$$

将(6.2.2)展开并保留一阶小量，得到

$$f_a(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu,\ t)+\sum_{\nu=1}^{N}\mathrm{grad}_\nu f_a\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\geqslant 0 \tag{6.2.3}$$

一般说来，不能由(6.2.1)和(6.2.3)得到

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathrm{grad}_\nu f_a\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\geqslant 0 \tag{6.2.4}$$

仅当(6.2.1)取等号时，即当约束处于张紧时刻，才有(6.2.4)成立。

2. **单面非完整约束情形** 设系统所受约束为单面线性非完整约束

$$\varphi_\beta=\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\boldsymbol{v}_\nu+D_\beta\geqslant 0 \tag{6.2.5}$$

非完整约束加在虚位移上的条件需要在速度空间中进行研究[8]。在速度空间中发生变更 $\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu$，由(6.2.5)得到

$$\sum_{\nu=1}^{N} B_\nu^{(\beta)}(\dot{r}_\nu+\delta\dot{r}_\nu)+D_\beta\geqslant 0 \tag{6.2.6}$$

仅当系统处于约束上，即(6.2.5)式取等号时，才能由(6.2.5)和(6.2.6)得到

$$\sum_{\nu=1}^{N} B_\nu^{(\beta)}\cdot\delta\dot{r}_\nu\geqslant 0 \tag{6.2.7}$$

或者按通常的 Hölder 原则[4]，由(6.2.5)得到

$$\sum_{\nu=1}^{N} B_\nu^{(\beta)}\cdot\delta r_\nu\geqslant 0 \tag{6.2.8}$$

§6.3 理想单面约束反力

现在假设有一个约束，例如 f_α 是单面的。与此约束相应的可能加速度的方程为

$$\sum_{\nu=1}^{N}\mathrm{grad}_\nu f_\alpha\cdot a_\nu+D_2 f_\alpha\geqslant 0 \tag{6.3.1}$$

研究质量为 m_ν 的质点，用 s_ν 表记作用在该质点上所有主动力的合力以及除约束 f_α 的反力以外的所有反力。力 s_ν 使质点 m_ν 产生的加速度将满足不等式(6.3.1)，即

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{m_\nu}\mathrm{grad}_\nu f_\alpha\cdot s_\nu+D_2 f_\alpha\geqslant 0 \tag{6.3.2}$$

此时约束不产生任何反力，而所研究系统的运动方程与成像没有这个约束一样的形式

$$m_\nu a_\nu=s_\nu \qquad (\nu=1,\cdots,N) \tag{6.3.3}$$

但是，如果成立不等式

等号情形下约束 f_α 的反力等于零，而方程(6.3.6)与(6.3.3)合而为一。由此得出结论：单面约束的乘子 λ_α 应是非负的，即

$$\lambda_\alpha \geqslant 0 \tag{6.3.10}$$

当约束不再作用时，它变为零。

对单面微分约束 $\varphi_\beta \geqslant 0$，结论仍然正确。

对双面约束，如果所有约束反力在任何虚位移上所作元功之和等于零，就说约束是理想的。因此，对理想约束我们得到表达式(6.3.5)。理想约束的概念可以推广到单面约束情形。我们仍取(6.3.5)作为单面约束反力的解析表达式。因此，在某虚位移上单面约束反力的元功为

$$\delta' A^{(R)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{a} \lambda_\alpha \delta f_\alpha + \sum_{\beta=1}^{b} \mu_\beta \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \tag{6.3.11}$$

将(6.3.11)与(6.2.4)、(6.2.8)比较，得到

$$\delta' A^{(R)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{R}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu \geqslant 0 \tag{6.3.12}$$

因此，对理想约束，约束反力在系统任何非释放虚位移上的元功之和等于零，在任何释放虚位移上的元功之和大于零。必须注意，在释放虚位移情形，所给表达式乃是有条件意义下的元功，即，如果假设在所有位移上约束反力保持其原来值。

§6.4 单面约束系统的D'Alembert-Lagrange原理和虚位移原理

1. D'Alembert-Lagrange原理 设系统受有 a 个有限约束

$$f_\alpha(x_\nu, y_\nu, z_\nu, t) \geqslant 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, a;\ \nu = 1, \cdots, N) \tag{6.4.1}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{b}\mu_\beta\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu=0 \qquad (6.4.8)$$

如果所有约束都是双面的，那么根据(6.4.4)，带约束乘子的项变为零，由(6.4.8)得到双面约束系统的 D'Alembert-Lagrange 原理

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\boldsymbol{a}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu=0 \qquad (6.4.9)$$

如果某些约束是单面的，那么根据(6.4.6)，带约束乘子项或是零或是正的，由(6.4.8)得到

$$\sum_{\nu=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\nu-m_\nu\boldsymbol{a}_\nu)\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\leqslant 0 \qquad (6.4.10)$$

其中等号属于非释放虚位移情形，小于号属于释放虚位移情形。表达式(6.4.10)就是单面约束系统的 D'Alembert-Lagrange 原理或动力学普遍方程。

2. 虚位移原理 如果系统处于静止状态，质点加速度总是零，即

$$\boldsymbol{a}_\nu=0 \quad (\nu=1,\ \cdots,\ N) \qquad (6.4.11)$$

将(6.4.11)代入(6.4.10)，得到

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\leqslant 0 \qquad (6.4.12)$$

这就是单面约束系统的虚位移原理。它可表述为：对单面理想约束，系统平衡的充要条件是主动力在任何虚位移上的元功之和等于或小于零。

原理(6.4.12)可表为直角坐标形式

$$\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu\delta x_\nu+Y_\nu\delta y_\nu+Z_\nu\delta z_\nu)\leqslant 0 \qquad (6.4.13)$$

其中X_ν, Y_ν, Z_ν为$\boldsymbol{F}_\nu$的投影。

为应用(6.4.13)解具体的静力学问题，我们进行下列演算。令系统受有l个双面约束

$$f_\alpha(x_\nu, y_\nu, z_\nu)=0 \quad (\alpha=1, \cdots, l;\ \nu=1, \cdots, N) \tag{6.4.14}$$

以及m个单面约束

$$F_\beta(x_\nu, y_\nu, z_\nu)=c_\beta \quad (\beta=1, \cdots, m;\ \nu=1, \cdots, N) \tag{6.4.15}$$

其中c_β具有一定符号，或正或负。约束(6.4.14)和(6.4.15)加在虚位移δx_ν, δy_ν, δz_ν上的条件为

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=0 \tag{6.4.16}$$

和

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\nu}\delta x_\nu+\frac{\partial F_\beta}{\partial y_\nu}\delta y_\nu+\frac{\partial F_\beta}{\partial z_\nu}\delta z_\nu\right)=\delta c_\beta \tag{6.4.17}$$

系统平衡方程(6.4.13)可写成形式

$$\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu\delta x_\nu+Y_\nu\delta y_\nu+Z_\nu\delta z_\nu)=\delta\pi \quad (\delta\pi\leqslant 0) \tag{6.4.18}$$

引入不定乘子λ_α和μ_β，由(6.4.16)、(6.4.17)和(6.4.18)得到

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left\{\left(X_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}+\sum_{\beta=1}^{m}\mu_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\nu}\right)\delta x_\nu\right.$$

$$+\left(Y_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}+\sum_{\beta=1}^{m}\mu_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial y_\nu}\right)\delta y_\nu$$

知量：x_ν，y_ν，z_ν，λ_α，μ_β。

若设想虚位移只脱离一个约束面，例如脱离约束

$$F_1(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu)=0$$

其余都不脱离。于是 $\delta c_1\neq 0$，$\delta c_2=\delta c_3=\cdots=\delta c_m=0$，而(6.4.20)成为

$$\delta\pi+\mu_1\delta c_1=0 \tag{6.4.23}$$

但 $\delta\pi<0$，故 $\mu_1\delta c_1>0$，即 μ_1 与 δc_1 具有相同的符号。类似地，得知 μ_β 与 δc_β 具有相同符号($\beta=1,\ \cdots,\ m$)。

进而，令系统除受有约束(6.4.14)外，还受有 m 个单面线性非完整约束

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\boldsymbol{v}_\nu+D_\beta=E_\beta\quad(\beta=1,\cdots,\ m) \tag{6.4.24}$$

其中 E_β 具有一定符号。约束(6.4.24)加在虚位移上的条件为

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu=\delta E_\beta$$

写成直角坐标形式为

$$\sum_{\nu=1}^{N}(B_{\nu x}^{(\beta)}\delta x_\nu+B_{\nu y}^{(\beta)}\delta y_\nu+B_{\nu z}^{(\beta)}\delta z_\nu)=\delta\mathrm{E}_\beta \tag{6.4.25}$$

其中 $B_{\nu x}^{(\beta)}$，$B_{\nu y}^{(\beta)}$，$B_{\nu z}^{(\beta)}$ 为矢量 $\boldsymbol{B}_\nu^{(\beta)}$ 的投影。类似于前面的讨论，得知：如果所有虚位移都是不脱离约束的，则得

$$\left.\begin{aligned}
&X_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}+\sum_{\beta=1}^{m}\mu_\beta B_{\nu x}^{(\beta)}=0\\
&Y_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu}+\sum_{\beta=1}^{m}\mu_\beta B_{\nu y}^{(\beta)}=0\\
&Z_\nu+\sum_{\alpha=1}^{l}\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu}+\sum_{\beta=1}^{m}\mu_\beta B_{\nu z}^{(\beta)}=0\\
&\qquad\qquad\qquad(\nu=1,\ \cdots,\ N)
\end{aligned}\right\} \tag{6.4.26}$$

方程(6.4.26)与(6.4.14)、(6.4.24)结合，使可解得x_ν，y_ν、z_ν，λ_α，μ_β。如果虚位移脱离约束，则μ_β与δE_β具有相同符号。

下面导出广义坐标下的平衡方程。令系统所受约束全是单面完整的，有形式

$$f_\alpha(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu)=c_\alpha\quad(\alpha=1,\ \cdots,\ l)\tag{6.4.27}$$

其中c_α有一定符号。$3N$个坐标x_ν，y_ν，z_ν可表为广义坐标q_1，q_2，$\cdots$，$q_n(n=3N-l)$和c_1，$\cdots$，c_l的函数，因此有

$$\left.\begin{aligned}\delta x_\nu&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial x_\nu}{\partial c_\alpha}\delta c_\alpha\\\delta y_\nu&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial y_\nu}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial y_\nu}{\partial c_\alpha}\delta c_\alpha\\\delta z_\nu&=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial z_\nu}{\partial c_\alpha}\delta c_\alpha\end{aligned}\right\}\tag{6.4.28}$$

将(6.4.28)代入平衡条件(6.4.18)，得到

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{N}\Bigg\{&\sum_{s=1}^{n}\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial q_s}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\right)\delta q_s\\&+\sum_{\alpha=1}^{l}\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial c_\alpha}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial c_\alpha}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial c_\alpha}\right)\delta c_\alpha\Bigg\}=\delta\pi\end{aligned}$$

令

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial q_s}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial q_s}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial q_s}\right)=Q_s$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\left(X_\nu\frac{\partial x_\nu}{\partial c_\alpha}+Y_\nu\frac{\partial y_\nu}{\partial c_\alpha}+Z_\nu\frac{\partial z_\nu}{\partial c_\alpha}\right)=C_\alpha$$

则有

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s = \delta \pi - \sum_{\alpha=1}^{l} C_\alpha \delta c_\alpha \qquad (6.4.29)$$

假定虚位移不脱离约束，则 $\delta\pi=0$，$\delta c_\alpha=0(\alpha=1,\ \cdots,\ l)$，于是得必要条件

$$\sum_{s=1}^{n} Q_s \delta q_s = 0 \qquad (6.4.30)$$

$$\delta \pi - \sum_{\alpha=1}^{l} C_\alpha \delta c_\alpha = 0 \qquad (6.4.31)$$

由 δq_1，…，δq_n 的独立性，(6.4.30)给出

$$Q_1=0,\ Q_2=0,\ \cdots,\ Q_n=0 \qquad (6.4.32)$$

如果虚位移脱离约束，即 $\delta\pi<0$，则由(6.4.31)得知 C_α 与 δc_α 应具有不同符号。

例 3 弹簧一端固定在空球壳内的球心上，另一端系一重为 mg 的小球。设弹簧自然长为 l_0，弹簧刚性系数为 k，球壳的半径为 R。试求小球的平衡位置及约束反力（图 6-1）[5]。

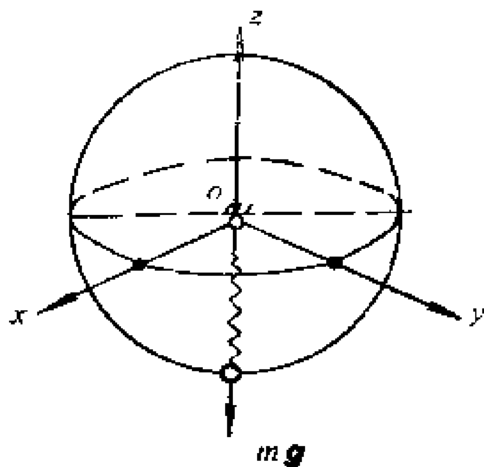


图 6-1

[解] 约束是单面的，可写成

$$x^2+y^2+z^2-R^2=c \quad (c\leqslant 0) \qquad (6.4.33)$$

若弹簧拉长至 l，则弹簧恢复力为 $(l-l_0)k$。设小球坐标为 $(x,\ y,\ z)$，则主动力投影为

$$X=-(l-l_0)k\frac{x}{l},\quad Y=-(l-l_0)k\frac{y}{l}$$

§6.5 受单面完整约束的完整系统的运动方程

1. 问题的提出 设力学系统的位置由n个广义坐标$\tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n$来确定，并受有一个理想单面完整约束

$$f(t, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n) \geqslant 0 \tag{6.5.1}$$

其中函数f是光滑的。我们来研究系统的运动。

为简化(6.5.1)，我们作变换$q_1 = f(t, \tilde{q}_1, \cdots, \tilde{q}_n)$，$q_2 = \tilde{q}_2, \cdots, q_n = \tilde{q}_n$。于是(6.5.1)具有简单形式

$$q_1 \geqslant 0 \tag{6.5.2}$$

设变换后的Lagrange函数为

$$L = T - V \tag{6.5.3}$$

其中

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(q_1, q)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{6.5.4}$$

$$V = V(q_1, q, t) \tag{6.5.5}$$

分别为系统的动能和势能，而$q = (q_2, \cdots, q_n)$。变换后的广义力为$Q_s(t, q_1, q)$。

2. 分段描述方法 为解决问题(6.5.2)、(6.5.3)，可进行分段描述。

(1) 连续运动阶段。如果$q_1 > 0$，则可用第二类Lagrange方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{6.5.6}$$

来描述运动。

(2) 碰撞阶段。如果在某时刻$t = t^*$坐标q_1变为零，那么

对单面约束发生碰撞，设碰撞是绝对弹性的，则在碰撞前后有关系

$$\dot{q}_1(t^*+0)=-\dot{q}_1(t^*-0) \qquad (6.5.7)$$

而与其他坐标相应的广义动量不变。

将$\dot{q}_1(t^*+0)$作为方程(6.5.6)的初始条件以确定下一次碰撞前时间间隔内的连续运动。然后再考虑某时刻 $t=t^{**}$ 坐标 q_1 又变为零而发生碰撞，如此等等，可研究运动的全过程。

分段描述方法的优点在于它很直观，缺点在于不能一下子得到运动的全过程。为求得运动的整体性质需要不断改变初始条件以确定下一次碰撞前时间间隔内的运动。

为克服上述缺点，我们希望找到一种不必分段的全程描述方法。

3．**全程描述方法** 所谓全程描述方法是指在系统中实现变量替换，使单面约束在新变量中的限制消失。

(1) Routh 函数的构成。令 $q_1=s$，$(q_2, \cdots, q_n)^T=y$，则

$$L=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\dot{s}, \dot{y}^T\end{vmatrix} A \begin{vmatrix}\dot{s} \\ \dot{y}\end{vmatrix}-V(t, s, y) \qquad (6.5.8)$$

将动能矩阵 A 分块如下

$$\left.\begin{aligned} &A=\begin{vmatrix} a & b^T \\ b & A_1 \end{vmatrix} \\ &a=a_{11}, \ b^T=|a_{12}, \cdots, a_{1n}| \\ &A_1=\{a_{ij}\}, \ (i,j=2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \qquad (6.5.9)$$

于是 Lagrange 函数表为

$$L=\frac{1}{2}(a\dot{s}^2+2\dot{s}b^T\dot{y}+\dot{y}^TA_1\dot{y})-V(t, s, y) \qquad (6.5.10)$$

广义力为 $S(t, s, y)$，$Y(t, s, y)$。广义速度 $\dot{y}$ 用相应的广义动量替代，可在研究中引入 Routh 函数。由(6.5.10)得

$$\left.\begin{aligned} p=\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}=\dot{s}b+A_1\dot{y} \\ \dot{y}=A_1^{-1}(p-\dot{s}b) \end{aligned}\right\} \tag{6.5.11}$$

Routh 函数为

$$\begin{aligned} R^*&=L(t,s,y,\dot{s},\dot{y})-p^T\dot{y} \\ &=\frac{1}{2}(a-b^TA_1^{-1}b)\dot{s}^2-\frac{1}{2}p^TA_1^{-1}p+\dot{s}p^TA_1^{-1}b-V(t,s,y) \end{aligned} \tag{6.5.12}$$

(2) 非光滑变换与运动方程。现作非光滑变换

$$s=|x| \tag{6.5.13}$$

变换(6.5.13)的逆变换是非单值的，但在下面的研究中不发生任何困难，因为并不需要实行逆变换。所作变换对任何 x 都自动满足约束方程 $s\geqslant 0$。考虑到变换(6.5.13)后，Routh 函数可写成

$$\left.\begin{aligned} R(t,x,y,\dot{x},p)&=R^*(t,\ |x|,\ y,\ \dot{x}\operatorname{sgn}x,p) \\ &=R_0+\dot{x}p^TA_1^{-1}b\operatorname{sgn}x \\ R_0&=\frac{1}{2}(a-b^TA_1^{-1}b)\dot{x}^2-\frac{1}{2}p^TA_1^{-1}p-V(t,\ |x|,y) \end{aligned}\right\} \tag{6.5.14}$$

设相应于 s 的广义力为 S，相应于新坐标 x 的广义力为 X。因广义力的虚功

$$\delta' A=S\delta s=X\delta x$$

又

$$\delta s=\delta x\operatorname{sgn}x$$

故

$$X=S\operatorname{sgn}x \tag{6.5.15}$$

因对新变量的系统单面约束被消除，那么基于 Routh 函数的运动方程可研究作为变量 x 的 Lagrange 方程以及对变量 y，p 的 Hamilton 方程。系统的运动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial R}{\partial x}=X\\&\dot{y}=-\frac{\partial R}{\partial p},\quad \dot{p}=\frac{\partial R}{\partial y}+Y\end{aligned}\right\}\tag{6.5.16}$$

据(6.5.14)有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R_0}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial R_0}{\partial x}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\dot{x}p^TA_1^{-1}b\,\mathrm{sgn}\,x\tag{6.5.17}$$

又

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\dot{x}p^TA_1^{-1}b\,\mathrm{sgn}\,x&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^TA_1^{-1}b\,\mathrm{sgn}\,x)-\dot{x}p^T\frac{\partial}{\partial x}(A_1^{-1}b\,\mathrm{sgn}\,x)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^TA_1^{-1}b)\mathrm{sgn}\,x+p^TA_1^{-1}b\dot{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{sgn}\,x)\\&\quad-\dot{x}p^TA_1^{-1}b\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{sgn}\,x)-\dot{x}p^T\frac{\partial}{\partial x}(A_1^{-1}b)\mathrm{sgn}\,x\\&=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^TA_1^{-1}b)-\dot{x}p^T\frac{\partial}{\partial x}(A_1^{-1}b)\right]\mathrm{sgn}\,x\end{aligned}\tag{6.5.18}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial p}&=\frac{\partial R_0}{\partial p}+\dot{x}A_1^{-1}b\,\mathrm{sgn}\,x\\\frac{\partial R}{\partial y}&=\frac{\partial R_0}{\partial y}+\dot{x}\frac{\partial}{\partial y}(p^TA_1^{-1}b)\mathrm{sgn}\,x\end{aligned}\right\}\tag{6.5.19}$$

将(6.5.17)、(6.5.18)、(6.5.19)和(6.5.15)代入方程(6.5.16)，我们得到[6]

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial R_0}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial R_0}{\partial x}=\Big[S-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^T A_1^{-1}b)\\
&\qquad +\dot{x}p^T\frac{\partial}{\partial x}(A_1^{-1}b)\Big]\mathrm{sgn}\,x\\
&\dot{y}=-\frac{\partial R_0}{\partial p}-\dot{x}A_1^{-1}b\,\mathrm{sgn}\,x\\
&\dot{p}=\frac{\partial R_0}{\partial y}+\dot{x}\frac{\partial}{\partial y}(p^T A_1^{-1}b)\mathrm{sgn}\,x+Y
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6.5.20)
$$

方程(6.5.20)即为受理想单面完整约束的完整系统的运动方程。这些方程仅包含第一类间断点，并确定在无限时间间隔上的解，描述进入约束、沿约束运动以及脱离约束的整个过程。

(3) 进入约束的研究。分析进入约束的解可分两种情形：当 $x=0$ 时，$\dot{x}\neq 0$；当 $x=0$ 时，$\dot{x}=0$。

在第一种情形，系统中将引起碰撞，在碰撞时刻所有广义速度 $\dot{s}$，$\dot{y}$ 都发生间断。但此时系统运动有如下三条性质。

第一，在碰撞时刻，与未加约束的广义坐标相应的广义动量 p 是连续的。这由(6.5.20)最后一个方程可以看出。

第二，在其上加上约束的变量的速度平方在碰撞时刻不发生间断。实际上，据(6.5.20)的第一个方程，得知 x 是时间的连续函数。此时由 $\dot{s}=\dot{x}\,\mathrm{sgn}\,x$ 得到 $\dot{s}^2=\dot{x}^2$，它也是连续函数。

第三，系统动能在碰撞时不发生间断。为证明这一性质，用 $\dot{s}_-$，$\dot{y}_-$，T_-表记碰撞前的广义速度和动能，用 $\dot{s}_+$，$\dot{y}_+$，T_+表记碰撞后的广义速度和动能。由(6.5.10)，有

$$
T_+=\frac{1}{2}(a\dot{s}_+^2+2\dot{s}_+b^T\dot{y}_++\dot{y}_+^T A_1\dot{y}_+) \qquad (6.5.21)
$$

根据前两条性质，得

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{s}_+b+A_1\dot{y}_+&=\dot{s}_-b+A_1\dot{y}_-\\
\dot{s}_+&=-\dot{s}_-
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6.5.22)
$$

由此得到

$$\dot{y}_+ = 2\dot{s}_- A_1^{-1} b + \dot{y}_- \tag{6.5.23}$$

将(6.5.22)和(6.5.23)代入(6.5.21)，有

$$T_+ = \frac{1}{2}\{a\dot{s}_-^2 - 2\dot{s}_- b^T(2\dot{s}_- A_1^{-1} b + \dot{y}_-)$$

$$+ (2\dot{s}_- A_1^{-1} b + \dot{y}_-)^T A_1 (2\dot{s}_- A_1^{-1} b + \dot{y}_-)\} = T_- \tag{6.5.24}$$

这就证明了碰撞前后动能不变。

在第二种情形，即 $x=0$，$\dot{x}=0$ 的情形，系统无碰撞地进入约束。以后在某段时间内系统可沿约束运动。因此，系统的Lagrange 部分自动地满足值 $x=0$，而 Hamilton 部分描述沿约束的运动。这种运动一直延续到满足不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p^T A_1^{-1} b) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(p^T A_1^{-1} p) - S + \frac{\partial V}{\partial s} \geqslant 0 \tag{6.5.25}$$

此不等式的左边乃是方程(6.5.20)第一个中不依赖于 $\dot{x}$ 的所有项，在方程中这些项前面有因子 $\mathrm{sgn}x$。如果不等式(6.5.25)成立，那么其左边部分就是约束反力。仅当这个不等式破坏，系统才脱离约束。

必须注意，对于首先实现沿约束的运动，在某时刻不等式(6.5.25)改变符号，除相应真实运动的解外还有一个解，即对所有 t，有 $x=0$。这种解对某些初条件的不唯一性是当 $x=0$ 时变换 $s=|x|$ 退化的自然结果。

例4　带单面约束的数学摆

如图 6-2 所示，摆在铅垂平面内运动，其位置用极坐标 r, y 来确定。在质点到悬挂点的距离上加上约束

$$r \leqslant R$$

试研究摆的运动。

［解］　引进量 $s=R-r$，则 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{s}^2 + (R-s)^2\dot{y}^2] + mg(R-s)\cos y \tag{6.5.26}$$

约束为

$$s \geqslant 0 \tag{6.5.27}$$

由(6.5.9)和(6.5.14)，有

$$a = m,\ b = 0,\ A_1 = m(R - s)^2$$

$$R_0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{p^2}{2m}(R - |x|)^{-2} + mg(R - |x|)\cos y$$

方程(6.5.20)有形式

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{x} + G(x,\ y,\ p)\operatorname{sgn}x = 0 \\ &G(x, y, p) = \frac{p^2}{m}(R - |x|)^{-3} + mg\cos y \\ &\dot{y} = \frac{p}{m}(R - |x|)^{-2},\ \dot{p} = -mg(R - |x|)\sin y \end{aligned}\right\} \tag{6.5.28}$$

对沿 $x=0$ 的运动，$G(x,\ y,\ p) \geqslant 0$。此时，第一个方程为恒等式，后两个方程有形式

$$\dot{y} = \frac{p}{mR^2},\qquad \dot{p} = -mgR\sin y \tag{6.5.29}$$

这便是众所周知的数学摆方程。当表达式 $G(x,\ y,\ p)$ 改变符号时，质点便脱离约束。由先沿约束运动而后脱离约束运动所组成的轨道满足方程(6.5.28)。但是，正如前面指出的，轨道 $x=0$ (对所有 t)也满足方程并且不依赖于约束反力的符号。

我们研究方程组(6.5.28)中的带碰撞的特殊运动。为简单起见，取初条件为 $t=0$，$x(0)=x_0$，$0<x_0<R$，$\dot{x}(0)=0, y(0)=0$，$p(0)=0$。方程解为 $y\equiv 0$，$p\equiv 0$，而 x 满足方程

$$\ddot{x} + g\operatorname{sgn}x = 0 \tag{6.5.30}$$

可以验证，方程(6.5.30)的通解为

$$x(t) = a\left(\int_0^{\varphi} \Pi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{\pi^2}{8}\right)$$

假设 h, ε, Δ很小，取派生方程($h=\varepsilon=\Delta=0$)的解作为变换方程

$$(x,\ z)\to(r,\ \varphi):\ x=r\cos\varphi,\ z=-r\Omega\sin\varphi\quad(r>0)\tag{6.5.34}$$

在新变量中方程(6.5.33)有形式

$$\left.\begin{aligned}\dot r&=-hr\sin^2\varphi-\Omega\Delta M(\varphi)\sin\varphi\\&\quad+\varepsilon\Omega^{-1}M(\varphi)\sin\psi\sin\varphi\\\dot\varphi&=\Omega-h\sin\varphi\cos\varphi-\Omega r^{-1}\Delta M(\varphi)\cos\varphi\\&\quad+\varepsilon(r\Omega)^{-1}M(\varphi)\sin\psi\cos\varphi\\\dot\psi&=\omega\\&\qquad(M(\varphi)=\mathrm{sgn}\cos\varphi)\end{aligned}\right\}\tag{6.5.35}$$

这是带一个慢变量 r 和两个快相 φ 及 ψ 的标准方程组，可用平均法来研究。研究任意形式的共振：$n\omega-m\Omega=\chi$，其中 n，m为整数，χ 是小量。按研究共振的方法，引进慢相 $\theta=n\psi-m\varphi$，此时有

$$\psi=\frac{1}{n}(m\varphi+\theta)\tag{6.5.36}$$

将(6.5.36)代入(6.5.35)，在 $n=1$，$m=2k$，$k=1,2,\cdots$ 下对 φ 取平均，得到

$$\left.\begin{aligned}&\dot r=-br+a\cos\theta\\&\dot\theta=\chi+cr^{-1}-ar^{-1}\sin\theta\\&b=\frac{h}{2},\quad a=\frac{-4k\varepsilon(-1)^k}{\pi\Omega(4k^2-1)},\ c=\frac{4k\Omega\Delta}{\pi}\end{aligned}\right\}\tag{6.5.37}$$

对其他的 n，m 没有共振。

恒稳状态方程的解有形式

$$
\left.
\begin{aligned}
r_0 &= -\frac{c\chi}{b^2+\chi^2} \pm \frac{\sqrt{a^2(b^2+\chi^2)-b^2c^2}}{b^2+\chi^2} \\
\cos\theta_0 &= \frac{b}{a} r_0 \\
\sin\theta_0 &= \frac{\chi}{a} r_0 + \frac{c}{a}
\end{aligned}
\right\} \quad (6.5.38)
$$

因 $r_0>0$，故应有 $c\chi<0$。因此，如果 $\Delta>0$，恒稳状态在前共振域($n\omega-m\Omega<0$)实现；如果 $\Delta<0$，在后共振域 ($n\omega-m\Omega>0$) 实现。共振状态还有一个实现条件，即 $a^2(b^2+\chi^2)-b^2c^2\geqslant 0$，或在原参数中表为

$$
e^2(4k^2-1)^{-2}\geqslant \pi^2\Omega^4\Delta^2h^2(h^2+4\chi^2)^{-1} \qquad (6.5.39)
$$

由此看出，当 $h=0$ 或 $\Delta=0$ 时，形如 $n=1$，$m=2k$，$k=1, 2, \cdots$ 的所有共振可实现。如果 $\Delta h\neq 0$，那么从某个数 k 开始共振不出现。

下面研究解(6.5.38)的稳定性。将 $r=r_0+\tilde{r}$，$\theta=\theta_0+\tilde{\theta}$($\tilde{r}$，$\tilde{\theta}$为小量)代入(6.5.37)并注意到(6.5.38)，得到

$$
\dot{\tilde{r}} = -b\tilde{r}-(\chi r_0+c)\tilde{\theta}
$$

$$
\dot{\tilde{\theta}} = \frac{\chi}{r_0}\tilde{r}-b\tilde{\theta}
$$

其特征方程为

$$
\begin{vmatrix}
\lambda+b & \chi r_0+c \\
-\dfrac{\chi}{r_0} & \lambda+b
\end{vmatrix} = 0
$$

即

$$
\lambda^2+2b\lambda+b^2+\chi(\chi r_0+c)r_0^{-1}=0
$$

由此得解(6.5.38)渐近稳定的充要条件为

$$
b>0, \quad r_0>-c\chi(b^2+\chi^2)^{-1} \qquad (6.5.40)
$$

将第二个条件与(6.5.38)比较得知，与(6.5.38)中上面符号相应的幅频特性分支是稳定的。

$$q_1 \geqslant 0 \tag{6.5.45}$$

在与约束碰撞期间，系统的运动用下述方程描述：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{\partial L}{\partial q_1}=F_1 \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (k=2,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{6.5.46}$$

其中F_1表示约束反力，当$q_1\neq 0$时，$F_1=0$。

在系统M中作广义坐标变换

$$\left.\begin{aligned} &q_1=Q_1,\ q_k=\varphi_k(Q_1,\ Q) \\ &J=\det\left|\frac{\partial \varphi}{\partial Q}\right|\neq 0,\ \varphi=(\varphi_2,\cdots,\varphi_n) \\ &\qquad\qquad Q=(Q_2,\cdots,Q_n)\end{aligned}\right\} \tag{6.5.47}$$

其中函数φ_k如此选取，使得动能在新坐标中的表达式

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(Q_1,Q)\dot{Q}_i\dot{Q}_j$$

满足关系

$$A_{1m}=0 \qquad (m=2,\cdots,n) \tag{6.5.48}$$

因

$$\dot{q}_k=\sum_{m=1}^{n}\frac{\partial \varphi_k}{\partial Q_m}\dot{Q}_m$$

那么(6.5.48)可写成形式

$$0=A_{1m}=\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{Q}_1\partial \dot{Q}_m}=\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_1}\left(\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \varphi_j}{\partial Q_m}\right)$$

$$=\sum_{j=2}^{n}\left(a_{1j}+\sum_{i=2}^{n}a_{ij}\frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_1}\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial Q_m}$$

这是对

$$x_j = a_{1j} + \sum_{i=2}^{n} a_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_1} \qquad (j=2,\cdots,n)$$

的线性齐次方程组，由(6.5.47)得知其行列式不为零，因此

$$x_j = 0$$

即

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij}(Q_1,\ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_1} = -a_{1j}(Q_1,\ \varphi)$$

$$(j=2,\ \cdots,\ n) \qquad (6.5.49)$$

对$\frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_1}$的线性方程组(6.5.49)的行列式乃是动能$T$矩阵的主子式，因此它异于零，而方程(6.5.49)可解出导数$\frac{\partial \varphi_i}{\partial Q_1}$。置

$$\varphi_i \Big|_{Q_1=0} = Q_i \qquad (i=2,\ \cdots,\ n) \qquad (6.5.50)$$

对函数φ_i建立Cauchy问题(6.5.49)、(6.5.50)，其中Q_1起独立变量作用，而Q_i为初始条件。因当$Q_1=0$时据(6.5.50)Jacobi行列式等于一，那么变换(6.5.47)可逆条件至少对充分小的Q_1成立。

进而，认为在系统(6.5.44)中变换(6.5.47)已经实现，而$a_{1m}=0(m=2,\cdots,n)$。此时方程(6.5.46)成为

$$\left.\begin{aligned} & a_{11}\ddot{q}_1 + \dot{a}_{11}\dot{q}_1 - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F_1 \\ & \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (k=2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \qquad (6.5.51)$$

当$q_1 \neq 0$时，$F_1=0$；而当$q_1=\dot{q}_1=0$时，函数F_1如此确定，以使广义加速度$\ddot{q}_1$为可能加速度。既然$a_{11}>0$，那么就有[7]

$$F_1=\max\left\{0,-\frac{\partial L}{\partial q_1}\bigg|_{q_1=+0}\right\} \tag{6.5.52}$$

(2) 辅助系统。现在确定辅助系统M^*，其Lagrange函数L^*由L中q_1用$|q_1|$替代所得，其广义力由(6.5.52)给出。对系统M和M^*的轨道$Q(t)=(q_1(t),\ q(t))$和$Q^*(t)=(q_1^*(t),q^*(t))$满足下述关系

$$q_1(t)=|q_1^*(t)|,\ q(t)=q^*(t) \tag{6.5.53}$$

实际上，当$q_1^*\geqslant 0$时，有$L^*=L$，而轨道$Q(t)$和$Q^*(t)$相重合。由于$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1}$，$\frac{\partial L^*}{\partial q}$和$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}}$对$q_1$是偶函数，而$\frac{\partial L^*}{\partial q_1}$是奇函数，系统$M^*$的运动方程在$q_1^*<0$时借助变换$q_1^*\to -q_1$而过渡到方程(6.5.46)，那么关系(6.5.53)亦成立。

在曲线$Q(t)$上量$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$在碰撞时仍是连续的；由于约束的理想性，动能$T$也是连续的。因此，由于$a_{1m}=0$，量$|\dot{q}_1(t)|$也是连续的。同样地，曲线$Q^*(t)$是作用

$$\int_{t_1}^{t_2}L^*(Q^*(t),\ \dot{Q}^*(t),\ t)\mathrm{d}t$$

的泛函极值，因此在曲线的每一点$\dot{q}_1^*(t)$，$\dot{q}^*(t)$是连续的。因此，碰撞后轨道$Q(t)$和$Q^*(t)$的切矢量对平面$q_1=0$是对称的，而关系(6.5.53)保持。这就证明在所有时间(6.5.53)都是对的。

(3) 正则形式。置

$$p_j=\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ H=\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-L^*$$

系统M^*的运动方程写成正则形式

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{6.5.54}$$

其中由于(6.5.51)和(6.5.52)需置

辅助系统M^*的运动方程有形式（6.5.54）、（6.5.55），其Hamilton函数为

$$H=\frac{1}{2E(\psi)}P_1^2+\frac{E(\psi)}{2\psi_1^2}P_2^2+f(\psi)+|Q_1| \tag{6.5.61}$$

其中

$$\psi=\varphi(|Q_1|,\ Q_2)\quad,\ \psi_1=\frac{\partial\psi}{\partial Q_2}$$

我们研究运动的某些特殊情形。

当$Q_1=P_1=0$时，质点沿曲线运动。此时$\varphi=\psi=Q_2$，$\varphi_1=\psi_1=1$，而Hamilton函数(6.5.61)有形式

$$H\Big|_{Q_1=P_1=0}=\frac{1}{2}E(Q_2)P_2^2+f(Q_2) \tag{6.5.62}$$

点沿曲线运动条件为

$$\frac{\partial H}{\partial Q_1}\Big|_{Q_1=+0}=E[1+E^2P_2^2f''(Q_2)]$$

$$=E^{\frac{1}{2}}(\cos\alpha+\varkappa v^2)\geqslant 0 \tag{6.5.63}$$

其中$\varkappa$和α分别为曲线的曲率和对横轴的倾角，v为点的速度。

如果$f'(x_0)=0$，则系统可有如下运动：质点周期地在曲线上跳起，而其横坐标为常数且等于x_0。

实际上，因$f'=0$，故$G=0$，而(6.5.59)有解$\varphi=Q_2$。于是

$$\psi=Q_2,\qquad \psi_1=\frac{\partial\psi}{\partial Q_2}=1 \tag{6.5.64}$$

又

$$E=\frac{1}{1+f'^2}=\frac{1}{2} \tag{6.5.65}$$

将(6.5.64)和(6.5.65)代入(6.5.61)，得Hamilton函数为

$$H=\frac{1}{2}P_1^2+\frac{1}{2}P_2^2+f(Q_2)+|Q_1| \tag{6.5.66}$$

而Hamilton方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{Q}_1=\frac{\partial H}{\partial P_1}=P_1\ , \quad \dot{Q}_2=\frac{\partial H}{\partial P_2}=P_2\\
&\dot{P}_1=-\frac{\partial H}{\partial Q_1}=-\operatorname{sgn}Q_1\\
&\dot{P}_2=-\frac{\partial H}{\partial Q_2}=-f'=0
\end{aligned}\right\} \tag{6.5.67}$$

容易验证此方程组有特解

$$\left.\begin{aligned}
&Q_1=\frac{1}{2}t[2(2h)^{\frac{1}{2}}-|t|],\quad P_1=(2h)^{\frac{1}{2}}-|t|\\
&Q_2=x_0,\qquad\qquad\qquad\qquad P_2=0
\end{aligned}\right\} \tag{6.5.68}$$

其中h为跳起高度，$\tau=4(2h)^{1/2}$为运动的周期(即第k次和第$k+2$次碰撞间的时间间隔，$k=1,\ 2,\ \cdots$)。

例7 带理想单面约束的刚体运动

设无尖无棱凸表面的刚体于重力场中在水平面上方运动。在运动期间刚体可与平面碰撞。设碰撞是绝对弹性的，而平面是绝对光滑的。试研究刚体的运动。

[解] 取空间固定坐标系$oxyz$，其原点在平面上，轴oz铅垂向上。取与刚体相固联的坐标系$G\xi\eta\zeta$，其原点G为刚体质心，其轴为中心惯性主轴。轴oz方向单位矢量$\boldsymbol{\gamma}$在坐标系$G\xi\eta\zeta$中有分量

$$\gamma_1=\sin\theta\sin\varphi,\ \gamma_2=\sin\theta\cos\varphi,\ \gamma_3=\cos\theta \tag{6.5.69}$$

其中ψ，θ，φ为Euler角。

设P是刚体表面最接近水平面oxy的点，它在$G\xi\eta\zeta$中的坐标ξ，η，ζ是角θ，φ的函数并表为$f(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0$，这给出刚体表面的形状。

设x，y，z是质心在$oxyz$中的坐标；m是刚体质量；g是重

力加速度；A，B，C是刚体主惯性矩；p，q，r是角速度在$G\xi$，$G\eta$，$G\zeta$上的投影。系统的动能与势能为

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2) \\ V&=mgz \end{aligned}\right\} \quad (6.5.70)$$

其中

$$p=\dot{\psi}\gamma_1+\dot{\theta}\cos\varphi,\ q=\dot{\psi}\gamma_2-\dot{\theta}\sin\varphi$$

$$r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$$

在刚体上加上单面约束

$$z\geqslant d \quad (6.5.71)$$

其中

$$d=-(\xi\gamma_1+\eta\gamma_2+\zeta\gamma_3) \quad (6.5.72)$$

是刚体质心到通过点P的水平面的距离。关系(6.5.71)表明，点P不低于平面oxy。

作用在刚体上的外力有重力以及碰撞时引起的铅垂向上的力，因此质心在平面oxy上的投影作匀速直线运动。不失一般性，可认为它不动($\dot{x}=\dot{y}=0$)，此时质心沿铅垂线运动。

令

$$q_1=z+\xi\gamma_1+\eta\gamma_2+\zeta\gamma_3 \quad (6.5.73)$$

并取记号

$$\chi_1=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi,\ \chi_2=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi \quad (6.5.74)$$

将(6.5.73)代入(6.5.70)，得到系统的Lagrange函数为

$$\begin{aligned} L=&\frac{1}{2}m\{\dot{q}_1-(\xi\gamma_1+\eta\gamma_2+\zeta\gamma_3)^{\cdot}\}^2+\frac{1}{2}\{A(\dot{\psi}\gamma_1+\dot{\theta}\cos\varphi)^2 \\ &+B(\dot{\psi}\gamma_2-\dot{\theta}\sin\varphi)^2+C(\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi})^2\} \\ &-mg\{q_1-(\xi\gamma_1+\eta\gamma_2+\zeta\gamma_3)\} \end{aligned} \quad (6.5.75)$$

令

$$q_1 \geqslant 0 \qquad (6.5.79)$$

为求得Hamilton形式的运动方程，需作变换(6.5.47)，即

$$q_1 = Q_1, \quad q_k = \varphi_k(Q_1, Q) \qquad (6.5.80)$$

其中

$$Q = (Q_2, Q_3, Q_4)$$

微分方程组(6.5.49)成为

$$a_{2j}\frac{\partial \varphi_2}{\partial Q_1} + a_{3j}\frac{\partial \varphi_3}{\partial Q_1} + a_{4j}\frac{\partial \varphi_4}{\partial Q_1} = -a_{1j} \qquad (j=2,3,4) \qquad (6.5.81)$$

带初条件

$$\varphi_j \Big|_{Q_1=0} = Q_j \qquad (j=2,3,4) \qquad (6.5.82)$$

在一般情形中不能得到变换(6.5.80)的显式。但如果系数$a_{1j} = (j=2,3,4)$很小，则 Cauchy 问题(6.5.81)、(6.5.82)的解可表为小参数的级数形式。在本问题中$a_{14}=0$，而a_{12}和a_{13}在刚体表面接近于球面且球心为质心时是很小的[8]。

假设刚体表面近似于半径为R的球面并表为方程

$$f = R^2 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \mu f_1(\xi, \eta, \zeta, \mu) = 0 \quad (0 < \mu \ll 1)$$

其中函数f_1为其变量的解析函数。系数a_{12}和a_{13}是与μ同阶的小量。

当$\mu=0$时，刚体为球；球的质心与其几何中心重合；在一般情形，球不是匀质的而有任意的中心惯性椭球。Lagrange 函数L_0由两部分组成

$$L_0 = L_0^{(1)} + L_0^{(2)} \qquad (6.5.83)$$

其中$L_0^{(1)}$为描述刚体相对质心的Euler-Poisson运动的Lagrange函数，如在(6.5.77)中取$m=0$，$\dot{q}_1=0$，则可得到它的表达式；函数$L_0^{(2)}$描述球心的运动($q_1 = z - R$)

$$L_0^{(2)} = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 - mgq_1 \quad q_1 \geqslant 0 \qquad (6.5.84)$$

带Lagrange函数L_0^*的辅助系统M_0^*有Hamilton函数

$$H_0 = H_0^{(1)} + H_0^{(2)} \tag{6.5.85}$$

其中$H_0^{(1)}$是Euler-Poisson问题的Hamilton函数，而

$$H_0^{(2)} = \frac{p_1^2}{2m} + mg\,|q_1| \tag{6.5.86}$$

Euler-Poisson运动已为众所周知。现研究M_0^*中刚体质心的运动，它由(6.5.86)描述。在图6-4中建立辅助系统M_0^*的势能V_0^*以及相平面q_1，p_1上的轨道。每条相轨道用对称于轴$q_1=0$的抛物线弧表示。系统M_0^*中所有运动以$\tau=4(2h/g)^{1/2}$为周期，其中h为球离平面上升的最大高度。量值τ等于球与平面第k次碰撞和第$k+2$次碰撞间的时间间隔。在图6-5上给出在M_0^*中量q_1对t的依赖关系，取$t=0$时$q_1=0$。函数$q_1(t)$由分段抛物线组成

$$q_1(t) = \begin{cases} (2gh)^{1/2}\,t - \dfrac{1}{2}gt^2 & \left(0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\tau}{2}\right) \\ -(2gh)^{1/2}\left(t - \dfrac{\tau}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{\tau}{2}\right)^2 & \left(\dfrac{\tau}{2} \leqslant t \leqslant \tau\right) \end{cases} \tag{6.5.87}$$

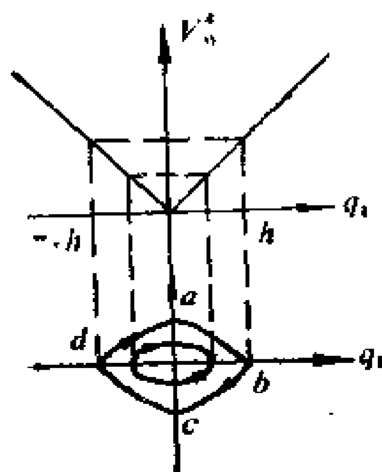


图6-4

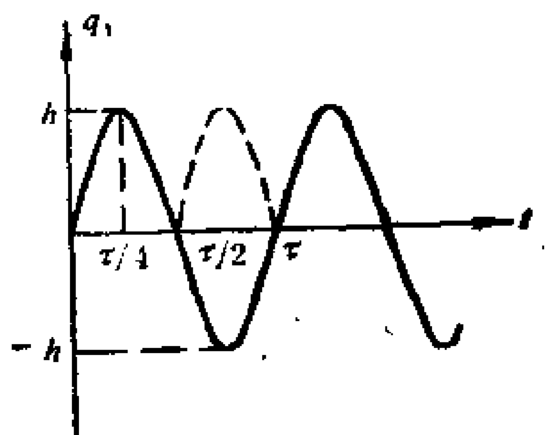


图6-5

由Lagrange函数(6.5.84)描述的质心的真实运动周期为$\tau/2$，它等于球与平面两次相继碰撞间的时间间隔。对真实运动，函数

$q_1(t)$的图可由图6-5用处于时间轴下方的部分相对此轴的镜象映射来得到(图6-5中的虚线)。真实运动的相图可由图6-4中仅取$q_1\geqslant 0$的那部分轨道并补充轴$q_1=0$上的相应线段而得到。例如，为由辅助系统的相轨道$abcd$得到真实系统的相轨道，需对弧abc补充一线段ca。由点c到点a的过渡发生跳跃，这相应于球与平面的碰撞。

对$\mu\neq 0$的情形，可借助Колмогоров定理作定性讨论[8]。

§6.6 受单面完整约束的非完整系统的运动方程

1. 问题的提出 设力学系统的位形由n个广义坐标$q_1,\cdots,q_n$确定，它的运动受有一个理想单面约束

$$q_1\geqslant 0 \tag{6.6.1}$$

以及$m<n$个理想双面线性齐次稳定的非完整约束

$$c_i=\sum_{s=1}^{n}a_{is}(q)\dot{q}_s=0 \quad (i=1,\cdots,m) \tag{6.6.2}$$

将非完整约束分成两类：对$i=1,\cdots,m_1$，关系(6.6.2)仅限制$q_1=0$的运动(第一类)；而对$i=m_1+1,\cdots,m$，则限制系统的所有运动(第二类)。

系统的运动可用分段描述法和全程描述法来研究。

2. 分段描述方法 如果坐标q_1在$t=t^*$时变为零，那么对单面完整约束发生，对第一类约束也发生碰撞。假设碰撞是绝对弹性的，据牛顿假设，有关系

$$\left.\begin{aligned}&\dot{q}_1(t^*+0)=-\dot{q}_1(t^*-0)\\&c_j(t^*+0)=-c_j(t^*-0)\quad(j=1,\cdots,m_1)\end{aligned}\right\} \tag{6.6.3}$$

无碰撞的运动可用通常双面非完整系统的运动方程来描述，例如，可用Boltzmann-Hamel方程来描述。取n个准速度如下：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\pi}_i=\sum_{s=1}^{n}l_{is}\dot{q}_s\\&\dot{\pi}_{n-m+j}=c_j\quad(i=1,\cdots,n-m;\ j=1,\cdots,m)\end{aligned}\right\}\tag{6.6.4}$$

其中l_{is}为q的函数，则方程在区域$q_1>0$上有形式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_k}-\frac{\partial T}{\partial\pi_k}+\sum_{j=1}^{n-m+m_1}\sum_{j=1}^{n}\gamma_{jk}^{i}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_i}\dot{\pi}_j\\&\qquad=P_k\quad(k=1,\cdots,n-m+m_1)\\&\dot{\pi}_r=0\quad(r=n-m+m_1+1,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{6.6.5}$$

其中T为考虑到关系(6.6.4)而组成的动能，但要注意在计算$\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_i}$时仅在最后才用$\dot{\pi}_r=0$；$P_k$为相应于准坐标$\pi_k$的广义力；非完整性系数$\gamma_{il}^{s}$为

$$\gamma_{il}^{s}=\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{su}}{\partial q_v}-\frac{\partial a_{sv}}{\partial q_u}\right)b_{vi}b_{ul}\tag{6.6.6}$$

这里a_{su}，b_{vi}为广义速度与准速度间关系的矩阵元素

$$\dot{q}=(b)\dot{\pi}\quad,\quad\dot{\pi}=(a)\dot{q}$$

对$q_1=0$，系统的运动也用方程(6.6.5)描述，但作用在系统上的主动力必须加上单面约束反力，且指标为$k=1$，…，$n-m$；$r=n-m+1$，…，n。

为建立碰撞相互作用，可在(6.6.4)中取

$$\pi_1 = q_1,\ \dot{\pi}_i = \frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=2,\ \cdots,\ n-m) \qquad (6.6.7)$$

其中T'为考虑到(6.6.4)第二组所组成的动能。准速度在碰撞后的值，由条件(6.6.3)及$\dot{\pi}_i(i=2,\ \cdots,n-m)$的连续性得到。这些值可作为方程组(6.6.5)的初条件以确定下一次碰撞前时间间隔内的运动，等等。

例8. 单位质量、单位重量、单位半径的匀质球在斜面P_1上无滑动地滚动(且永不离开P_1)并与绝对粗糙平面P_2(P_2垂直于P_1)相碰。试研究球的运动。

[解] 本问题中，平面P_2实现单面完整约束和第一类非完整约束，而平面P_1实现第二类非完整约束。

引进惯性坐标系$OXYZ$，其轴OX和OZ分别在平面P_1和P上并与OY垂直，而OY沿P_1和P_2的交线并使坐标系为右手系(图6-6)。取广义坐标为$q_1=x-1$，$q_2=y$，$q_3=\theta$，$q_4=\psi$，$q_5=\varphi$，其中x，$y(z\equiv1)$为球心坐标，ψ，θ，φ为Euler角。

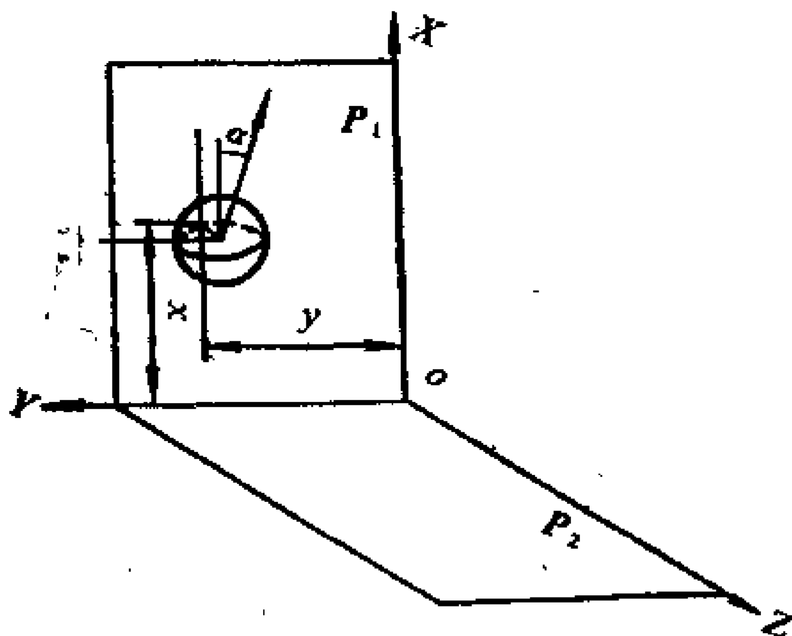


图6-6

系统动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}a^2(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2) \tag{6.6.8}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\\\omega_y&=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi\\\omega_z&=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{6.6.9}$$

而a为球对直径的惯性半径。广义力为

$$Q_1=-\cos\alpha,\ Q_2=-\cos\beta,\ Q_3=Q_4=Q_5=0 \tag{6.6.10}$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为铅垂向上的单位矢量的坐标。

系统所受单面约束为

$$q_1\geqslant 0 \tag{6.6.11}$$

第一类非完整约束为

$$c_1=\dot{q}_2-\omega_z=0 \tag{6.6.12}$$

第二类非完整约束为

$$\left.\begin{aligned}c_2&=\dot{q}_1-\omega_y=0\\c_3&=\dot{q}_2+\omega_x=0\end{aligned}\right\} \tag{6.6.13}$$

(1) 首先，研究$q_1>0$下的运动。准坐标π和准速度$\dot{\pi}$，据(6.6.4)和(6.6.7)，有形式

$$\left.\begin{aligned}&\pi_1=q_1,\ \dot{\pi}_3=c_1,\ \dot{\pi}_4=c_2\equiv 0,\ \dot{\pi}_5=c_3\equiv 0\\&\dot{\pi}_2=\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_2}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\Big[\frac{1}{2}(\dot{\pi}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}a^2\\&\cdot\{\dot{q}_2^2+\dot{\pi}_1^2+(\dot{q}_2-\dot{\pi}_3)^2\}\Big]=(1+2a^2)\dot{q}_2-a^2\dot{\pi}_3\end{aligned}\right\} \tag{6.6.14}$$

我们来计算不计非完整约束时的动能。因

$$\dot{q}_1=\dot{\pi}_1,\ \dot{q}_2=\frac{\dot{\pi}_2+a^2\dot{\pi}_3}{1+2a^2}$$

$$\omega_x=\dot{\pi}_5-\dot{q}_2=\dot{\pi}_5-\frac{\dot{\pi}_2+a^2\dot{\pi}_3}{1+2a^2}$$

$$\omega_y=\dot{q}_1-\dot{\pi}_4=\dot{\pi}_1-\dot{\pi}_4$$

$$\omega_z=\dot{q}_2-\dot{\pi}_3=\frac{\dot{\pi}_2+a^2\dot{\pi}_3}{1+2a^2}-\dot{\pi}_3$$

将其代入(6.6.8)，得

$$T=\frac{1}{2}(1+a^2)\dot{\pi}_1^2+\frac{1}{2(1+2a^2)}\{\dot{\pi}_2^2+a^2(1+a^2)\dot{\pi}_3^2\}$$
$$+\frac{1}{2}a^2\left\{\dot{\pi}_5^2-2\dot{\pi}_5\frac{\dot{\pi}_2+a^2\dot{\pi}_3}{1+2a^2}+\dot{\pi}_4^2-2\dot{\pi}_1\dot{\pi}_4\right\} \quad (6.6.15)$$

再计算与准坐标π_1，π_2，π_3相应的广义力P_1，P_2，P_3。因广义力的虚功为

$$\delta' A=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2$$

而

$$\delta q_1=\delta\pi_1, \quad \delta q_2=\frac{\delta\pi_2+a^2\delta\pi_3}{1+2a^2}$$

故

$$\delta' A=Q_1\delta\pi_1+\frac{Q_2}{1+2a^2}\delta\pi_2+\frac{Q_2a^2}{1+2a^2}\delta\pi_3$$
$$=P_1\delta\pi_1+P_2\delta\pi_2+P_3\delta\pi_3$$

于是

$$P_1=Q_1, \quad P_2=\frac{Q_2}{1+2a^2}, \qquad P_3=\frac{Q_2a^2}{1+2a^2} \qquad (6.6.16)$$

下面计算Boltzmann三标记号γ_{ri}^s。由(6.6.14)，知

$$(a)=\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a^2 & 0 & a^2 & a^2\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\cos\theta \\ 1 & 0 & -\sin\psi & 0 & \sin\theta\cos\psi \\ 0 & 1 & \cos\psi & 0 & \sin\theta\sin\psi \end{Bmatrix}$$

因此

$$
\left.\begin{aligned}
&\gamma_{1}{}^{2}{}_{2}=-\gamma_{2}{}^{2}{}_{1}=\frac{a^{2}}{1+2a^{2}}\\
&\gamma_{1}{}^{2}{}_{3}=-\gamma_{3}{}^{2}{}_{1}=\frac{a^{4}}{1+2a^{2}}\\
&\gamma_{1}{}^{3}{}_{2}=-\gamma_{2}{}^{3}{}_{1}=-\frac{1}{1+2a^{2}}\\
&\gamma_{1}{}^{3}{}_{3}=-\gamma_{3}{}^{3}{}_{1}=-\frac{a^{2}}{1+2a^{2}}\\
&\gamma_{2}{}^{4}{}_{3}=-\gamma_{3}{}^{4}{}_{2}=\frac{1}{1+2a^{2}}\\
&\gamma_{1}{}^{5}{}_{2}=-\gamma_{2}{}^{5}{}_{1}=\frac{1}{1+2a^{2}}\\
&\gamma_{1}{}^{5}{}_{3}=-\gamma_{3}{}^{5}{}_{1}=-\frac{1+a^{2}}{1+2a^{2}}\text{，其余}\gamma_{\nu}{}^{r}{}_{l}=0
\end{aligned}\right\}\tag{6.6.17}
$$

Boltzmann-Hamel方程(6.6.5)写成形式

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{1}}-\frac{\partial T}{\partial\pi_{1}}+\sum_{r=1}^{5}\sum_{\nu=1}^{3}\gamma_{\nu}{}^{r}{}_{1}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{r}}\dot{\pi}_{\nu}=P_{1}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{2}}-\frac{\partial T}{\partial\pi_{2}}+\sum_{r=1}^{5}\sum_{\nu=1}^{3}\gamma_{\nu}{}^{r}{}_{2}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{r}}\dot{\pi}_{\nu}=P_{2}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{3}}-\frac{\partial T}{\partial\pi_{3}}+\sum_{r=1}^{5}\sum_{\nu=1}^{3}\gamma_{\nu}{}^{r}{}_{3}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{r}}\dot{\pi}_{\nu}=P_{3}
\end{aligned}\right\}\tag{6.6.18}
$$

由(6.6.15)得

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{1}}\right|_{\dot{\pi}_{4}=\dot{\pi}_{5}=0}=(1+a^{2})\dot{\pi}_{1}\\
&\left.\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{2}}\right|_{\dot{\pi}_{4}=\dot{\pi}_{5}=0}=\frac{\dot{\pi}_{2}}{1+2a^{2}}\\
&\left.\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{3}}\right|_{\dot{\pi}_{4}=\dot{\pi}_{5}=0}=\frac{a^{2}(1+a^{2})}{1+2a^{2}}\dot{\pi}_{3}\\
&\frac{\partial T}{\partial\pi_{k}}=0\qquad(k=1,2,3)
\end{aligned}\right\}\tag{6.6.19}
$$

又

$$\sum_{r=1}^{6}\sum_{\nu=1}^{3}\gamma_{\nu k}^{r}\frac{\partial T}{\partial\dot{\pi}_{r}}\dot{\pi}_{\nu}=0\qquad(k=1,\ 2,\ 3)\qquad(6.6.20)$$

将(6.6.19)、(6.6.20)和(6.6.16)代入(6.6.18)，并整理得

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\pi}_1&=-\frac{\cos\alpha}{1+a^2}\\ \ddot{\pi}_2&=-\cos\beta\\ \ddot{\pi}_3&=-\frac{\cos\beta}{1+a^2}\end{aligned}\right\}\qquad(6.6.21)$$

以及

$$\dot{\pi}_4=\dot{\pi}_5=0\qquad(6.6.22)$$

现在来积分方程组(6.6.21)。令$t=0$时$q_1=q_{10}$，$\dot{q}_1=\dot{q}_{10}$，注意到$\dot{\pi}_1=\ddot{q}_1$，则(6.6.21)第一个方程可积分为

$$q_1=-\frac{\cos\alpha}{2(1+a^2)}t^2+\dot{q}_{10}t+q_{10}\qquad(6.6.23)$$

第二、第三个方程可积分为

$$\dot{\pi}_2=-t\cos\beta+A_1,\qquad\dot{\pi}_3=-\frac{\cos\beta}{1+a^2}t+A_2\qquad(6.6.24)$$

其中A_1，A_2为积分常数。

(2) 其次，研究碰撞过程及碰后运动。假设球与平面P_2的碰撞是绝对弹性的。设$t=t^*$时发生碰撞，则有

$$q_1(t^*)=0,\qquad\dot{q}_1(t^*+0)=-\dot{q}_1(t^*-0)\qquad(6.6.25)$$

将第一式代入(6.6.23)，则t^*满足关系

$$-\frac{\cos\alpha}{2(1+a^2)}t^{*2}+\dot{q}_{10}t^*+q_{10}=0\qquad(6.6.26)$$

不妨设$q_{10}>0$，$\dot{q}_{10}>0$，则(6.6.26)两根为一正一负，分别记作t_2^*与t_1^*。容易看出

$$-\frac{\cos\alpha}{2(1+a^2)}t^{**2}+\left(\frac{2\cos\alpha}{1+a^2}t^*-\dot{q}_{10}\right)t^{**}$$

$$+\frac{\cos\alpha}{2(1+a^2)}t^{*2}-\left(\frac{2\cos\alpha}{1+a^2}t^*-\dot{q}_{10}\right)t^*=0$$

$$(6.6.33)$$

令(6.6.33)的两根为$t_1^{**}(t_1^{**}=t_2^*)$及t_2^{**}，则

$$t_2^{**}-t_1^{**}=\frac{2\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{1+a^2}t^*-\dot{q}_{10}\right)^2}}{\frac{\cos\alpha}{1+a^2}} \qquad (6.6.34)$$

利用(6.6.26)，容易证明

$$t_2^{**}-t_1^{**}=t_2^*-t_1^* \qquad (6.6.35)$$

利用(6.6.35)和(6.6.26)，容易证明第二次碰前速度与第一次碰前速度相等。因此，第二次碰后速度与第一次碰后速度亦相等。

于是$q_1=q_1(t)$的全过程可以描述如下：q_1以某q_{10}，$\dot{q}_{10}$初条件向上运动至最大高度h，然后下落。当$t=t^*$时，发生第一次碰撞。碰后反弹至最大高度，再下落。当$t=t^{**}$时，发生第二次碰撞。碰后反弹至最大高度，再下落，等等。全过程可表为图6-7。$q_1=q_1(t)$是分段抛物线，最大高度$h=(1+a^2)\dot{q}_{10}^2/(2\cos\alpha)+q_{10}$，周期$\tau=2(2h\cos\alpha/(1+a^2))^{1/2}$（即两次相继碰撞间的时间间隔）。

下面研究准速度在碰撞前后的变化。首先研究$\dot{\pi}_3$。由(6.6.24)，我们有第一次碰撞前的规律

$$\dot{\pi}_3=-t\frac{\cos\beta}{1+a^2}+A_2 \qquad (0\leqslant t\leqslant t^*-0) \quad (6.6.36)$$

因$\dot{\pi}_3=c_1$是第一类非完整约束，由(6.6.3)知第一次碰撞前后的关系为

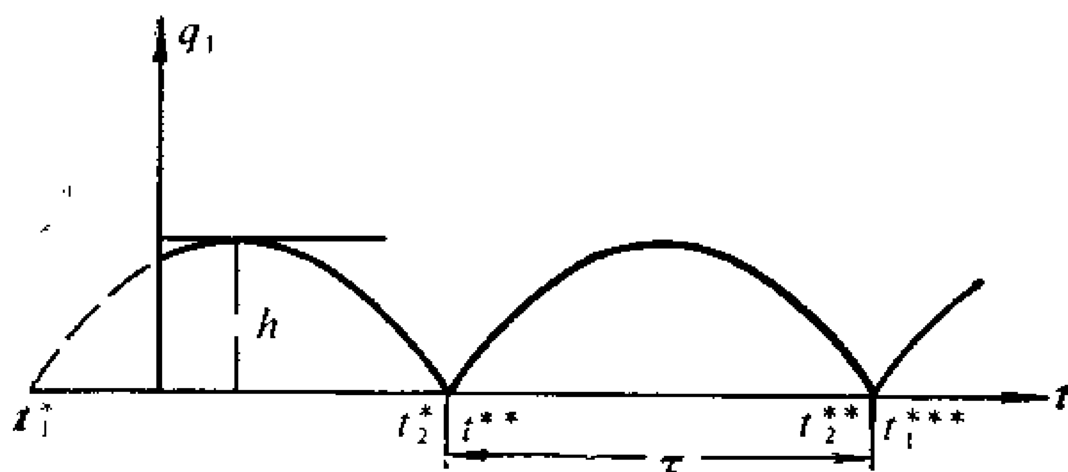


图6-7

$$\dot{\pi}_3(t^*+0)=-\dot{\pi}_3(t^*-0)=t^*\frac{\cos\beta}{1+a^2}-A_2 \tag{6.6.37}$$

而在 $t^*+0\leqslant t\leqslant t^{**}-0$时，有

$$\dot{\pi}_3=-t\frac{\cos\beta}{1+a^2}+2t^*\frac{\cos\beta}{1+a^2}-A_2 \tag{6.6.38}$$

第二次碰撞前后关系为

$$\begin{aligned}\dot{\pi}(t^{**}+0)=-\dot{\pi}_3 t^{**}(-0)=t^{**}\frac{\cos\beta}{1+a^2}\\ -2t^*\frac{\cos\beta}{1+a^2}+A_2\end{aligned} \tag{6.6.39}$$

因此，当$t^{**}+0\leqslant t\leqslant t^{***}-0$ 时，有

$$\dot{\pi}_3=-t\frac{\cos\beta}{1+a^2}+2t^{**}\frac{\cos\beta}{1+a^2}-2t^*\frac{\cos\beta}{1+a^2}+A_2 \tag{6.6.40}$$

第三次碰撞前的准速度为

$$\dot{\pi}_3(t^{***}-0)=-t^{***}\frac{\cos\beta}{1+a^2}+2t^{**}\frac{\cos\beta}{1+a^2}$$

$$-2t^{*}\frac{\cos\beta}{1+a^2}+A_2 \qquad (6.6.41)$$

类似于(6.6.35)，有

$$t^{***}-t^{**}=t^{**}-t^{*} \qquad (6.6.42)$$

于是得

$$\dot{\pi}_3(t^{***}-0)=\dot{\pi}_3(t^{*}-0) \qquad (6.6.43)$$

$\dot{\pi}_3=\dot{\pi}_3(t)$的图形如图6-8所示。

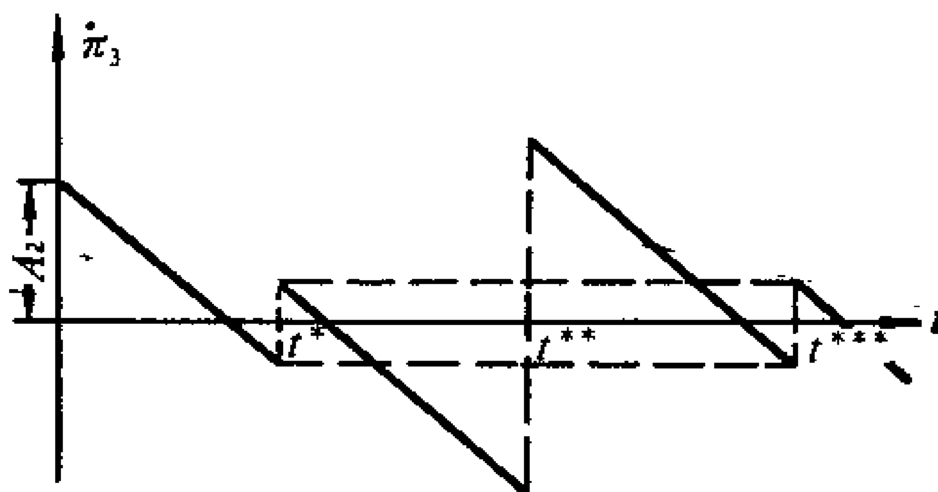


图6-8

其次研究$\dot{\pi}_2$。因$\dot{\pi}_2$在球与平面P_2相碰时并不改变，故

$$\dot{\pi}_2=-t\cos\beta+A_1 \qquad (6.6.44)$$

它对任何t都对。

下面研究$\dot{q}_2$。由(6.6.14)知$\dot{q}_2$依赖于$\dot{\pi}_2$和$\dot{\pi}_3$，故$\dot{q}_2$在碰撞时也发生变化。我们有

$$
\dot{q}_2=\begin{cases}
-t\dfrac{\cos\beta}{1+a^2}+\dfrac{A_1+a^2A_2}{1+2a^2} & (0\leqslant t\leqslant t^*-0)\\
-t\dfrac{\cos\beta}{1+a^2}+\dfrac{A_1-a^2A_2}{1+2a^2}+\dfrac{a^2}{(1+a^2)(1+2a^2)} & \\
\cdot t^*\cos\beta & (t^*+0\leqslant t\leqslant t^{**}-0)\\
-t\dfrac{\cos\beta}{1+a^2}+\dfrac{A_1+a^2A_2}{1+2a^2}+\dfrac{a^2}{(1+a^2)(1+2a^2)} & \\
\cdot(t^{**}-t^*)\cos\beta & (t^{**}+0\leqslant t\leqslant t^{***}-0)
\end{cases}
\tag{6.6.45}
$$

于是再可求得ω_x，ω_y，ω_z。

这个例子是作为一般理论的说明例子。当然，就这一例子本身来说，用质心运动定理和相对质心的动量矩定理也是可以解决的。

3. 全程描述方法 上述分段描述方法比较复杂，因为为求得运动的整体性质需不断改变初条件以确定下一次碰撞前时间间隔内的运动。处理单面约束系统动力学的另一种方法是借助某个不经受碰撞的辅助系统 M^* 来描述系统M的运动，这种方法可称为全程描述方法。

在相空间$(q^*, \dot{\pi}^*)$中描述系统 M^* 的运动，系统 M 和 M^* 的轨道间关系为

$$
q_1=|q_1^*|,q_2=q_2^*,\cdots,q_n=q_n^*,\quad \dot{\pi}_i=\dot{\pi}_i^*(\mathrm{sgn}\,q_1^*)^{\nu_i}
$$
$$
\nu_i=\begin{cases}1, i=1,n-m+1,\cdots,n-m+m_1\\ 0\ \text{其他}\end{cases}
\tag{6.6.46}
$$

我们有如下定理[9]。

定理 相空间中轨道(6.6.46)用下述方程组来描述

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s^*}-\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s^*}+\sum_{j=1}^{n-m+m_1}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{js}^{i*}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_i^*}\dot{\pi}_j^*=P_s^*\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s=1,\cdots,n-m+m_1)\\
&\dot{\pi}_r^*=0 \qquad\qquad (r=n-m+m_1+1,\cdots,n)\\
&\gamma_{js}^{i*}=\gamma_{js}^{i}(\mathrm{sgn}q_1^*)^{\nu_s+\nu_i+\nu_j}\\
&P_s^*=P_s(\mathrm{sgn}q_1^*)^{\nu_s}
\end{aligned}\right\}
\tag{6.6.47}
$$

其中T^*为q，$\dot{\pi}$用(6.6.46)替代时所得动能表达式。

关系(6.6.46)满足单面约束条件(6.6.1)和碰撞条件(6.6.3)。可以由关系(6.6.46)和方程(6.6.47)导出方程(6.6.5)。而且，方程组(6.6.47)的解用空间(q^*，$\dot{\pi}^*$)的连续曲线来描述。因此，利用上述定理可直接描述单面约束系统运动的全过程。

现在用全程描述方法来计算例8。对此例有$n=5$，$m=3$，$m_1=1$，以及

$$
\nu_i=\begin{cases}1 & (i=1,3)\\ 0 & (i=2,4,5)\end{cases}
\tag{6.6.48}
$$

而

$$
\left.\begin{aligned}
&\gamma_{12}^{2*}=\gamma_{12}^{2}(\mathrm{sgn}q_1^*)^{\nu_1+\nu_2+\nu_2}=\gamma_{12}^{2}\mathrm{sgn}q_1^*,\\
&\gamma_{21}^{2*}=\gamma_{21}^{2}\mathrm{sgn}q_1^*,\ \gamma_{13}^{2*}=\gamma_{13}^{2},\\
&\gamma_{12}^{3*}=\gamma_{12}^{3},\ \gamma_{13}^{3*}=\gamma_{13}^{3}\mathrm{sgn}q_1^*,\\
&\gamma_{23}^{4*}=\gamma_{23}^{4}\mathrm{sgn}q_1^*,\\
&\gamma_{12}^{5*}=\gamma_{12}^{5}\mathrm{sgn}q_1^*,\ \gamma_{13}^{5*}=\gamma_{13}^{5}
\end{aligned}\right\}
\tag{6.6.49}
$$

又

$$
\left.\begin{aligned}
&\dot{\pi}_1=\dot{\pi}_1^*(\mathrm{sgn}q_1^*)^{\nu_1}=\dot{\pi}_1^*\mathrm{sgn}q_1^*,\ \dot{\pi}_2=\dot{\pi}_2^*\\
&\dot{\pi}_3=\dot{\pi}_3^*\mathrm{sgn}q_1^*,\ \dot{\pi}_4=\dot{\pi}_4^*,\ \dot{\pi}_5=\dot{\pi}_5^*
\end{aligned}\right\}
\tag{6.6.50}
$$

将(6.6.50)代入(6.6.15)，得

$$T^*=\frac{1}{2}(1+a^2)\dot{\pi}_1^{*2}+\frac{1}{2(1+2a^2)}\Big\{\dot{\pi}_2^{*2}$$

$$+a^2(1+a^2)\dot{\pi}_3^{*2}\Big\}+\frac{1}{2}a^2\Big\{\dot{\pi}_5^{*2}$$

$$-2\dot{\pi}_5^*\frac{\dot{\pi}_2^*+a^2\dot{\pi}_3^*\,\mathrm{sgn}\,q_1^*}{1+2a^2}+\dot{\pi}_4^{*2}-2\dot{\pi}_1^*\dot{\pi}_4^*\,\mathrm{sgn}\,q_1^*\Big\}$$

(6.6.51)

考虑到非完整约束时为

$$T^*\Big|_{\dot{\pi}_4^*=\dot{\pi}_5^*=0}=\frac{1}{2}(1+a^2)\dot{\pi}_1^{*2}+\frac{1}{2(1+2a^2)}\Big\{\dot{\pi}_2^{*2}$$

$$+a^2(1+a^2)\dot{\pi}_3^{*2}\Big\}\qquad(6.6.52)$$

现在先计算非完整性项，我们有

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}\gamma_{j1}^{i*}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_i^*}\dot{\pi}_j^*=\gamma_{21}^{2*}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_2^*}\dot{\pi}_2^*+\gamma_{31}^{2*}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_2^*}\dot{\pi}_3^*$$

$$+\gamma_{21}^{3*}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_3^*}\dot{\pi}_2^*+\gamma_{31}^{3*}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_3^*}\dot{\pi}_3^*+\gamma_{21}^{5*}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_5^*}\dot{\pi}_2^*$$

$$+\gamma_{31}^{5*}\frac{\partial T^*}{\partial\dot{\pi}_5^*}\dot{\pi}_3^*=\gamma_{21}^{2}\,\mathrm{sgn}\,q_1^*\frac{\dot{\pi}_2^*}{1+2a^2}\dot{\pi}_2^*$$

$$+\gamma_{31}^{2}\frac{\dot{\pi}_2^*}{1+2a^2}\dot{\pi}_3^*+\gamma_{21}^{3}\frac{a^2(1+a^2)}{1+2a^2}\dot{\pi}_3^*\dot{\pi}_2^*$$

$$+\gamma_{31}^{3}\,\mathrm{sgn}\,q_1^*\frac{a^2(1+a^2)}{1+2a^2}\dot{\pi}_3^*\dot{\pi}_3^*$$

$$+\gamma_{21}^{5}\,\mathrm{sgn}q_1^{*}\left(-\frac{1}{1+2a^2}\right)\left\{\dot{\pi}_2^{*}+\dot{\pi}_3^{*}\mathrm{sgn}q_1^{*}\right\}\dot{\pi}_2^{*}$$

$$+\gamma_{31}^{5}\left(-\frac{1}{1+2a^2}\right)\left\{\dot{\pi}_2^{*}+\dot{\pi}_3^{*}\mathrm{sgn}q_1^{*}\right\}\dot{\pi}_3^{*}=0$$

(6.6.53)

类似地计算得

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{5}\gamma_{js}^{i}\frac{\partial T^{*}}{\partial\pi_i^{*}}\dot{\pi}_j^{*}=0 \qquad (s=2,3) \qquad (6.6.54)$$

又因 T^{*} 不含广义坐标，故

$$\frac{\partial T^{*}}{\partial\pi_s^{*}}=0 \qquad (s=1,2,3) \qquad (6.6.55)$$

再计算广义力。因

$$\delta' A=P_1\delta\pi_1+P_2\delta\pi_2+P_3\delta\pi_3=P_1^{*}\delta\pi_1^{*}+P_2^{*}\delta\pi_2^{*}+P_3^{*}\delta\pi_3^{*}$$

由(6.6.50)知

$$\delta\pi_1=\delta\pi_1^{*}\mathrm{sgn}q_1^{*},\ \delta\pi_2=\delta\pi_2^{*},\ \delta\pi_3=\delta\pi_3^{*}\mathrm{sgn}q_1^{*}$$

故

$$P_1^{*}=P_1\mathrm{sgn}q_1^{*},\ P_2^{*}=P_2,\ P_3^{*}=P_3\mathrm{sgn}q_1^{*}$$

(6.6.56)

最后，将(6.6.51)、(6.6.53)—(6.6.56)代入(6.6.47)并整理，得到

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\pi}_1^{*}&=-\frac{\cos\alpha}{1+a^2}\mathrm{sgn}q_1^{*}\\ \ddot{\pi}_2^{*}&=-\cos\beta\\ \ddot{\pi}_3^{*}&=-\frac{\cos\beta}{1+a^2}\mathrm{sgn}q_1^{*}\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.57)$$

以及

$$\dot{\pi}_4^* = 0, \quad \dot{\pi}_5^* = 0 \qquad (6.6.58)$$

现在来积分方程(6.6.57)。因 $q = \dot{\pi}_1^*$，故方程(6.6.57)第一个可写成

$$\ddot{q}_1^* = -\frac{\cos\alpha}{1+a^2}\,\mathrm{sgn}\,q_1^*$$

令$\cos\alpha > 0$，$q_1^*(0) = 0$，上式可积分为

$$q_1^* = -\frac{t\cos\alpha}{2(1+a^2)}(|t| - \tau) \qquad (-\tau \leqslant t \leqslant \tau) \quad (6.6.59)$$

解(6.6.59)用图 6-9a 表示，它有周期2τ。因$q_1 = |q_1^*|$，故q_1有周期τ(图6-9b)。

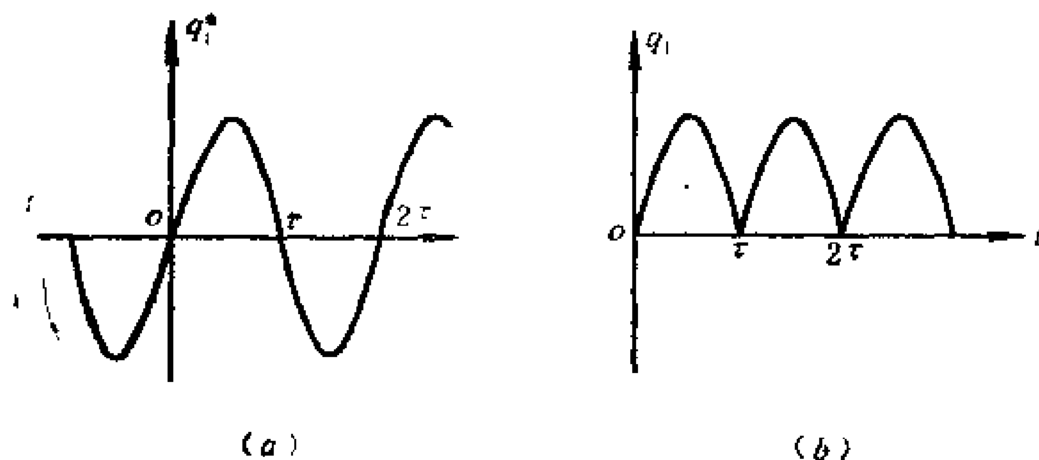


图6-9

方程(6.6.57)的第二个和第三个积分为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\pi}_2^* &= A_1 - t\cos\beta \\ \dot{\pi}_3^* &= -\frac{t\cos\beta}{1+a^2}\,\mathrm{sgn}\,q_1^* + A_2\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.60)$$

因而

$$\dot{q}_2 = -\frac{t\cos\beta}{1+a^2} + \frac{A_1 + a^2 A_2 \operatorname{sgn} \overset{*}{q}_1}{1+2a^2} \qquad (6.6.61)$$

以及

$$\omega_x = -\dot{q}_2, \quad \omega_y = \dot{q}_1$$

$$\omega_z = \dot{q}_2 - \dot{\pi}_3 = \frac{A_1 - (1+a^2) A_2 \operatorname{sgn} \overset{*}{q}_1}{1+2a^2} \qquad (6.6.62)$$

§6.7 单面非完整约束系统的运动方程

1. 问题的提出 设力学系统的位形由 n 个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定，并受有 g 个线性非完整约束，其中$g-1$个是双面的：

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+\beta+1,s}(q,t)\dot{q}_s + a_{\varepsilon+\beta+1}(q,t) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \beta=1, \cdots, g-1, \\ \varepsilon=n-g \end{pmatrix} \qquad (6.7.1)$$

而一个是单面的：

$$\sum_{s=1}^{n} a_{\varepsilon+1,s}(q,t)\dot{q}_s + a_{\varepsilon+1}(q,t) \geqslant 0 \qquad (6.7.2)$$

例如，如果(6.7.2)中等号相应于纯滚动，则(6.7.2)表示又滚又滑状态，且滑动被限制在一定方向上。

问题在于描述同时受有单面非完整约束和双面非完整约束的系统的运动。

2. 运动的描述 选取 n 个彼此独立的准速度

$$\dot{\pi}_k = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}\dot{q}_s + a_k \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{6.7.3}$$

设由此可解出广义速度

$$\dot{q}_s = \sum_{k=1}^{n} b_{sk}\dot{\pi}_k + b_s \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{6.7.4}$$

于是约束(6.7.1)和(6.7.2)成为

$$\dot{\pi}_{\varepsilon+\beta+1} = 0 \qquad (\beta=1,\cdots,g-1) \tag{6.7.5}$$

$$\dot{\pi}_{\varepsilon+1} \geqslant 0 \tag{6.7.6}$$

如果不计非完整约束(6.7.1)和(6.7.2)，则系统的运动可用 Boltzmann—Hamel 方程来描述[4]：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_s} - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \pi_s} + \sum_{r=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \gamma_{is}^{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_r}\dot{\pi}_i + \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_s^r \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_r} = \tilde{P}_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{6.7.7}$$

其中 Boltzmann 三标记号

$$\gamma_{im}^{s} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right) b_{ri} b_{km} \tag{6.7.8}$$

而

$$\varepsilon_m^s = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k}\right) b_r b_{km} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial t} - \frac{\partial a_s}{\partial q_k}\right) b_{km} \tag{6.7.9}$$

注意到γ_{tm}^{s}，e_{m}^{s}亦可用交换关系给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\pi_{s}-\delta\dot{\pi}_{s}=\sum_{k=1}^{n}a_{sk}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q_{k}-\delta\dot{q}_{k}\right]$$

$$+\sum_{t=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\gamma_{tm}^{s}\omega_{t}\delta\pi_{m}+\sum_{m=1}^{n}e_{m}^{s}\delta\pi_{m}$$

$$(s=1,\cdots,n) \qquad (6.7.10)$$

方程(6.7.7)中带"～"的量为用准坐标表示的量。

方程(6.7.7)的优点在于不仅可研究纯滚动，而且还可研究滑动情形，因为对完整系统和非完整系统它具有同样的形式。

现在，首先考虑非完整约束(6.7.1)且(6.7.2)取等号的情形。此时，因

$$\dot{\pi}_{\varepsilon+1}=\dot{\pi}_{\varepsilon+\beta+1}=0$$

而方程(6.7.7)有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{\nu}}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\pi_{\nu}}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\varepsilon}\gamma_{\mu\nu}^{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{r}}\dot{\pi}_{\mu}$$

$$+\sum_{r=1}^{n}e_{\nu}^{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{r}}=\tilde{P}_{\nu} \quad (\nu=1,\cdots,\varepsilon) \qquad (6.7.11)$$

这就是通常双面非完整系统的Boltzmann-Hamel方程[4]。

其次，考虑(6.7.2)取不等号情形。此时有

$$\dot{\pi}_{\mu+\beta+1}=0,\dot{\pi}_{\varepsilon+1}>0$$

而方程(6.7.7)有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{\gamma}}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\pi_{\gamma}}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\varepsilon+1}\gamma_{\mu\gamma}^{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{r}}\dot{\pi}_{\mu}$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_{\gamma}^{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{r}}=\tilde{P}_{\gamma}(\gamma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{6.7.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{\varepsilon+1}}-\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\pi_{\varepsilon+1}}+\sum_{r=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\varepsilon+1}\gamma_{\mu,\varepsilon+1}^{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{r}}\dot{\pi}_{\mu}$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\varepsilon_{\varepsilon+1}^{r}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\dot{\pi}_{r}}=\tilde{P}_{\varepsilon+1}+R_{\varepsilon+1} \tag{6.7.13}$$

其中$R_{\varepsilon+1}$为单面非完整约束反力。方程组(6.7.12)、(6.7.13)不封闭，因此尚需给出$R_{\varepsilon+1}$的信息。例如，如果$R_{\varepsilon+1}$是由滑动引起的摩擦力，那么可由库仑定律给出一个补充方程。

最后，考虑由$\dot{\pi}_{\varepsilon+1}>0$到$\dot{\pi}_{\varepsilon+1}=0$的过渡问题。有时，这就是由滑动向滚动的过渡。

例9 质量为m、半径为a的匀质圆球沿粗糙水平面滚动，并且接触点的滑动仅在固定方向(轴ox正向)上发生。试研究球的运动规律。

［解］ 首先，作预备计算。取球心坐标x，$y(z=a)$及Euler角ψ，θ，φ为广义坐标，令

$$q_1=\theta,\ q_2=\varphi,\ q_3=\psi,\ q_4=x,\ q_5=y$$

准速度取为

$$\dot{\pi}_1=\omega_x=\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$$

$$\dot{\pi}_2=\omega_y=\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$$

$$\dot{\pi}_3=\omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$$

$$\dot{\pi}_4=\dot{x}-a\omega_y=\dot{x}-a(\dot{\theta}\sin\psi-\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi)$$

$$\dot{\pi}_5=\dot{y}+a\omega_x=\dot{y}+a(\dot{\theta}\cos\psi+\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)$$

以及

$$
\left.\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_1}\right|_{\dot\pi_4=\dot\pi_5=0}=\frac{7}{5}ma^2\dot\pi_1,\quad \left.\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_2}\right|_{\dot\pi_4=\dot\pi_5=0}=\frac{7}{5}ma^2\dot\pi_2
$$

$$
\left.\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_3}\right|_{\dot\pi_4=\dot\pi_5=0}=\frac{2}{5}ma^2\dot\pi_3,\quad \left.\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_4}\right|_{\dot\pi_4=\dot\pi_5=0}=ma\dot\pi_2
$$

$$
\left.\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_5}\right|_{\dot\pi_4=\dot\pi_5=0}=-ma\dot\pi_1 \tag{6.7.18}
$$

又

$$
\sum_{r=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{3}\gamma^r_{\mu 1}\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_r}\dot\pi_\mu=\gamma^3_{21}\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_3}\dot\pi_2+\gamma^2_{31}\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_2}\dot\pi_3+\gamma^4_{31}\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_4}\dot\pi_3
$$

$$
=(-1)\frac{2}{5}ma^2\dot\pi_3\dot\pi_2+1\cdot\frac{7}{5}ma^2\dot\pi_2\dot\pi_3+(-a)ma\dot\pi_2\dot\pi_3=0 \tag{6.7.19}
$$

类似地有

$$
\sum_{r=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{3}\gamma^r_{\mu\nu}\frac{\partial\tilde T}{\partial\dot\pi_r}\dot\pi_\mu=0\qquad(\nu=2,3) \tag{6.7.20}
$$

设主动力向质心简化的主矢为$\boldsymbol V$，主矩为$\boldsymbol m^\circ$，则其虚功之和为

$$
\begin{aligned}
\delta' A&=\tilde V_1\delta x+\tilde V_2\delta y+\tilde m^0_1\delta\pi_1+\tilde m^0_2\delta\pi_2+\tilde m^0_3\delta\pi_3\\
&=(\tilde m^0_1-a\tilde V_2)\delta\pi_1+(\tilde m^0_2+a\tilde V_1)\delta\pi_2+\tilde m^0_3\delta\pi_3
\end{aligned} \tag{6.7.21}
$$

故

$$\tilde{P}_1=\tilde{m}_1^0-a\tilde{V}_2,\quad \tilde{P}_2=\tilde{m}_2^0+a\tilde{V}_1,\quad \tilde{P}_3=\tilde{m}_3^0 \tag{6.7.22}$$

又

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \pi_\nu}=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 5) \tag{6.7.23}$$

将(6.7.18)、(6.7.19)、(6.7.20)、(6.7.22)和(6.7.23)代入Boltzmann-Hamel方程(6.7.11)，我们得到

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{7}{5}ma^2\ddot{\pi}_1=\tilde{m}_1^0-a\tilde{V}_2\\
&\frac{7}{5}ma^2\ddot{\pi}_2=\tilde{m}_2^0+a\tilde{V}_1\\
&\frac{2}{5}ma^2\ddot{\pi}_3=\tilde{m}_3^0
\end{aligned}\right\} \tag{6.7.24}$$

第三，研究$\dot{\pi}_4>0$的情形，我们有

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_1}\right|_{\dot{\pi}_5=0}=\frac{7}{5}ma^2\dot{\pi}_1,\quad \left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_2}\right|_{\dot{\pi}_5=0}=\frac{7}{5}ma^2\dot{\pi}_2+ma\dot{\pi}_4\\
&\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_3}\right|_{\dot{\pi}_5=0}=\frac{2}{5}ma^2\dot{\pi}_3,\quad \left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_4}\right|_{\dot{\pi}_5=0}=ma\dot{\pi}_2+m\dot{\pi}_4\\
&\left.\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_5}\right|_{\dot{\pi}_5=0}=-ma\dot{\pi}_1
\end{aligned}\right\} \tag{6.7.25}$$

$$\sum_{r=1}^{5}\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_{\mu\nu}^{r}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\pi}_r}\dot{\pi}_\mu=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{6.7.26}$$

此时主动力虚功之和的表达式不同于(6.7.21)。由$\delta\pi_4\neq 0$引起的虚功以及滑动摩擦力$\boldsymbol{F}_x$(方向与轴Ox正向相反)的虚功要

加进去，我们有

$$\delta' A=\tilde{V}_1\delta x+\tilde{V}_2\delta y+\tilde{m}_1^0\delta\pi_1+\tilde{m}_2^0\delta\pi_2+\tilde{m}_3^0\delta\pi_3-F_x\delta\pi_4$$

$$=(\tilde{m}_1^0-a\tilde{V}_2)\delta\pi_1+(\tilde{m}_2^0+a\tilde{V}_1)\delta\pi_2+\tilde{m}_3^0\delta\pi_3+(\tilde{V}_1-F_x)\delta\pi_4$$

因此

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_1=\tilde{m}_1^0-a\tilde{V}_2, \quad \tilde{P}_2=\tilde{m}_2^0+a\tilde{V}_1\\&\tilde{P}_3=\tilde{m}_3^0, \quad \tilde{P}_4=\tilde{V}_1-F_x\end{aligned} \tag{6.7.27}$$

又

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\pi_\nu}=0 \qquad (\nu=1,2,3,4) \tag{6.7.28}$$

将(6.7.25)－(6.7.28)代入方程(6.7.12)、(6.7.13)，我们得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{7}{5}ma^2\ddot{\pi}_1=\tilde{m}_1^0-a\tilde{V}_2\\&\frac{7}{5}ma^2\ddot{\pi}_2+ma\ddot{\pi}_4=\tilde{m}_2^0+a\tilde{V}_1\\&\frac{2}{5}ma^2\ddot{\pi}_3=\tilde{m}_3^0\\&ma\ddot{\pi}_2+m\ddot{\pi}_4=\tilde{V}_1-F_x\end{aligned}\right\} \tag{6.7.29}$$

为使方程(6.7.29)封闭，需补充一个方程。由库伦摩擦定律知

$$(F_x^2+F_y^2)^{\frac{1}{2}}=\nu N=\nu mg \tag{6.7.30}$$

其中ν为滑动摩擦系数。关系(6.7.30)中出现的不作虚功的力F_y可由

$$m\ddot{y}=\tilde{V}_2-F_y \tag{6.7.31}$$

确定，其中F_y的方向沿轴Oy负向。考虑到非完整约束$\dot{\pi}_5=0$，由(6.7.31)得到

$$F_y=\tilde{V}_2+ma\ddot{\pi}_1 \tag{6.7.32}$$

这样，由方程(6.7.29)以及关系(6.7.30)、(6.7.32)便可求解运动。

最后，研究由$\dot{\pi}_4>0$向$\dot{\pi}_4=0$的过渡问题。设外加主动力的主矢、主矩为零，即

$$\tilde{V}_1=\tilde{V}_2=\tilde{m}_1^0=\tilde{m}_2^0=\tilde{m}_3^0=0$$

则(6.7.29)成为

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{7}{5}ma^2\ddot{\pi}_1=0, & \dfrac{7}{5}ma^2\ddot{\pi}_2+ma\ddot{\pi}_4=0 \\ \dfrac{2}{5}ma^2\ddot{\pi}_3=0, & ma\ddot{\pi}_2+m\ddot{\pi}_4=-F_x\end{array}\right\} \tag{6.7.33}$$

(6.7.32)成为

$$F_y=ma\ddot{\pi}_1=0$$

而(6.7.30)给出

$$F_x=\nu mg$$

积分(6.7.33)，得

$$\left.\begin{array}{l}\omega_1=\dot{\pi}_1=\omega_{10}, \quad \omega_3=\dot{\pi}_3=\omega_{30} \\ \omega_2=\dot{\pi}_2=\omega_{20}+\dfrac{5\nu g}{2a}t \\ \omega_4=\dot{\pi}_4=\omega_{40}-\dfrac{7\nu g}{2a}t\end{array}\right\} \tag{6.7.34}$$

其中ω_{10}，ω_{20}，ω_{30}，ω_{40}为ω_1，ω_2，ω_3，ω_4的初值。令$\omega_{40}>0$，则当$0\leqslant t<2\omega_{40}a/(7\nu g)$时，$\dot{\pi}_4>0$，球沿轴$ox$正向滑动，此时$F_x=\nu mg$；而当$t=2\omega_{40}a/(7\nu g)$时，$\dot{\pi}_4=0$，球作纯滚动，此时$(F_x^2+F_y^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\nu mg$。

对外加主动力非零情形亦可作类似讨论。

习　题

1. 利用(6.5.6)和(6.5.7)研究真空中重质点受单面约束 $y\geqslant 0$ 并在铅垂平面 oxy(ox为水平，oy铅垂向上)内的运动。假设质点与 $y=0$ 碰撞时为绝对弹性碰撞。

2. 试证明方程 $\ddot{x}+g\,\mathrm{sgn}\,x=0$ 的通解为

$$x(t)=a\left(\int_0^{\varphi}\Pi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{\pi^2}{8}\right),\quad \varphi=\sqrt{\frac{g}{a}}\,t+\theta$$

(a,θ 为任意常数，$a>0$)，而 $\Pi(\xi)=\int_0^{\xi}\mathrm{sgn}\cos\eta\,\mathrm{d}\eta$

3. 试由(6.5.35)和(6.5.36)导出(6.5.37)。

4. 试由(6.5.61)导出关系(6.5.63)。

5. 直接由(6.6.46)及方程(6.6.47)导出方程(6.6.5)。

参 考 文 献

[1] Суслов. Г. К., Теоретическая Механика, Гостехиздат, 1946.

[2] Levi-Civita. T., Amaldi. V., Lezioni di Meccanica razionale, I, Bologna, 1930.

[3] 牛青萍，经典力学的基本微分原理与不完整力学组的运动方程，力学学报，第7卷第2期，1964年。

[4] 梅凤翔，非完整系统力学基础，北京工业学院出版社，1985年。

[5] 汪家诉，分析动力学，高教出版社，1958年。

[6] Журавлев. В. Ф., Уравнения Движения Механических систем с идеальными односторонными связями, П. М. М, Т.42, Вып5, 1978.